Matematica II - 22.11.11

Algebra delle matrici - Moltiplicazione

1. In algebra lineare giocano un ruolo importante le coppie, terne, ..., $n-$ple ordinate di numeri reali; cosi' come una coppia ordinata di numeri reali puo' essere pensata come un punto del piano, e una terna ordinata di numeri reali puo' essere pensata come un punto dello spazio, anche una $n-$pla ordinata $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di numeri reali $a_i \in \mathbb{R}$ viene pensata come un'unica entita', ed indicata con un unico simbolo:

   $$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{1}$$

   Si dice che $a_1, a_2, ...$ sono la prima, seconda, ... componente di a. Si scrive anche, piu' brevemente,

   $$a = (a_j)_{j=1,\ldots,n}.$$

   Dal punto di vista operativo, una scrittura come la prima individua le componenti direttamente, una scrittura come la seconda le individua attraverso una regola. [1]

   Di regola, indicheremo le $n-$ple ordinate con lettere minuscole e, come fatto sopra, se indicheremo una $n-$pla con una certa lettera, allora indicheremo le sue componenti con quella stessa lettera con indici.

   Per ciascun intero positivo n, l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali viene indicato con

   $$\mathbb{R}^n.$$

   Una $n-$pla ordinata puo' essere identificata una matrice riga o con una matrice colonna. Se indicheremo una $n-$pla con una certa lettera, allora indicheremo la corrispondente matrice colonna con la stessa lettera, e la corrispondente matrice riga con la stessa lettera con un apice.

[1] Ad esempio, si ha

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{i}\right)_{i=1,\ldots,4}.$$

Cosi', per la $n-$pla (1) scriveremo

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad e \qquad a' = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]\,.$$

2. Definiamo il prodotto di una riga a' di numeri reali per una colonna b di numeri reali, aventi lo stesso numero di componenti, come il numero reale ottenuto moltiplicando ciascuna componente di a' per la corrispondente componente di b, e poi sommando. Ad esempio

$$[1\ 2\ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

In generale, si ha

$$\begin{aligned} a'b &= [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \end{aligned}$$

La moltiplicazione di una riga per una colonna aventi diversi numeri di componenti non viene definita.

Questa operazione puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente le equazioni lineari. Ad esempio, l'equazione

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

puo' essere scritta come

$$[1\ 2\ 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4.$$

In generale, l'equazione lineare

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

puo' essere scritta come

$$[a_1\ a_2\ \ldots\ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

e rappresentata sinteticamente come

$$a'x = b,$$

dove a' e' la riga dei coefficienti e x e' la colonna delle incognite.

3. Una tabella di numeri reali viene detta matrice; ciascuna matrice viene pensata come un'unica entita' e viene indicata con una lettere maiuscola; se una matrice A possiede m righe ed n colonne si dice che A ha *tipo* $m \cdot n$; il numero reale che compare in A nella riga $i-$ma e colonna $j - ma$ viene detto *elemento di posto* (i, j) di A.

   La generica matrice A di tipo $m \cdot n$ viene rappresentata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

   oppure, piu' brevemente,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}},$$

   o $A = [a_{ij}]$ quando il tipo e' chiaro dal contesto. Si noti che i e j non hanno alcun particolare significato, potrebbero essere sostituiti da altri due simboli, come h e k.

   Dal punto di vista operativo, una scrittura come la prima individua le componenti direttamente, una scrittura come la seconda le individua attraverso una regola. [2]

[2] Ad esempio, si ha

$$[i + j]_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Per ogni coppia di interi positivi m, n, l'insieme delle matrici di numeri reali di tipo $m \cdot n$ viene indicato con

$$\mathbb{R}^{m \times n}.$$

Dunque, l'insieme delle colonne di m numeri reali viene indicato con $\mathbb{R}^{m \cdot 1}$, e l'insieme delle righe di n numeri reali viene indicato con $\mathbb{R}^{1 \cdot n}$.

Per indicare che una matrice A ha tipo $m \cdot n$ si usa scrivere anche

$$\underset{m \cdot n}{A}.$$

Noi useremo spesso una notazione un po' diversa, suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo come Matlab, o Octave.

Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A, per indicare una matrice, si usa il simbolo $A(i, j)$ per indicare l'elemento di posto (i, j) in A; si usa il simbolo $A(i, :)$ per indicare la riga $i-$ma di A, e si usa il simbolo $A(:, j)$ per indicare la colonna $j-$ma di A.

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$A(2, 3) = 7, \qquad A(2, :) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad A(:, 3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

4. Se il numero delle colonne di una matrice A e' uguale al numero delle righe di una matrice B, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B, ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo cosi' una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB.

Ad esempio, si ha

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1\cdot 9+2\cdot 12 & 1\cdot 10+2\cdot 13 & 1\cdot 11+2\cdot 14 \\ 3\cdot 9+4\cdot 12 & 3\cdot 10+4\cdot 13 & 3\cdot 11+4\cdot 14 \\ 5\cdot 9+6\cdot 12 & 5\cdot 10+6\cdot 13 & 5\cdot 11+6\cdot 14 \\ 7\cdot 9+8\cdot 12 & 7\cdot 10+8\cdot 13 & 7\cdot 11+8\cdot 14 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{rrr} 33 & 36 & 39 \\ 75 & 82 & 89 \\ 117 & 128 & 139 \\ 159 & 174 & 189 \end{array}\right]$$

In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \cdot n$ per una matrice B di tipo $n \cdot p$ e' la matrice AB di tipo $m \cdot p$

$$\underset{m\cdot n}{A} \cdot \underset{n\cdot p}{B} = \underset{m\cdot p}{AB}$$

data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i,j) in AB e' dato dal prodotto della riga $i-$ma di A per la colonna $j-$ma di B :

$$(AB)(i,j) = A(i,:)B(:,j), \qquad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,p.$$

Con riferimento agli elementi, si ha

$$\begin{aligned} (AB)(i,j) &= A(i,:)B(:,j) \\ &= [A(i,1)\ A(i,2)\ \ldots\ A(i,n)] \left[\begin{array}{c} B(1,j) \\ B(2,j) \\ \vdots \\ B(n,j) \end{array}\right] \\ &= A(i,1)B(1,j) + A(i,2)B(2,j) + \cdots + A(i,n)B(n,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} A(i,h)B(h,j). \end{aligned}$$

La moltiplicazione di matrici estende la moltiplicazione dei numeri reali, nel senso che le matrici di tipo $1\cdot 1$ sono numeri reali, e la moltiplicazione di matrici di tipo $1 \cdot 1$ e' la moltiplicazione di numeri reali.

5. La moltiplicazione di matrici puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente i sistemi lineari. Ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ 4x_1 + 5x_2 & = & 6 \\ 7x_1 + 8x_2 & = & 9 \end{cases},$$

puo' essere riscritto come

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \\ 7x_1 + 8x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix},$$

e il primo membro puo' essere fattorizzato nel prodotto della matrice dei coefficienti per la colonna delle incognite:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

In generale, il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

puo' essere scritto come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

e rappresentato sinteticamente come

$$Ax = b,$$

dove A e' la matrice di tipo $m \cdot n$ dei coefficienti, x e' la colonna delle n incognite, e b e' la colonna degli m termini noti.

6. Le matrici quadrate che hanno 1 sulla diagonale e 0 altrove svolgono il ruolo del numero 1, e per questa ragione vengono dette *matrici unita'*. Esplicitamente, queste matrici sono

$$I_1 = [1], \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \ldots;$$

la matrice I_n unita' di ordine n e' data da

$$I_n(i,j) = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases} \qquad \forall i,j = 1,\ldots,n.$$

La proprieta' di queste matrici e' che

$$I_m A = A = A I_n,$$

per ogni m, n e per ogni matrice A di tipo $m \cdot n$. Verifichiamo la prima parte di questa proprieta' per $m = 2$ e $n = 3$. Per ogni matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

di tipo $2 \cdot 3$ si ha

$$\begin{aligned} I_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot d & 1 \cdot b + 0 \cdot e & 1 \cdot c + 0 \cdot f \\ 0 \cdot a + 1 \cdot d & 0 \cdot b + 1 \cdot e & 0 \cdot c + 1 \cdot f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

In generale, la proprieta' si puo' mostrare come segue. Da una parte si ha

$$(I_m A)(i,j) = \sum_{h=1,\ldots,m} I_m(i,h) A(h,j) = I_m(i,i) A(i,j) = A(i,j),$$

per ogni i e j; dunque $I_m A = A$. La dimostrazione dall'altra parte e' analoga.

7. Date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \cdot n, n \cdot p, p \cdot q$, abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sara' di tipo $m \cdot q$:
$$(AB)C, \qquad A(BC).$$
Ad esempio, per $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, si ha
$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix} \\ A(BC) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [50] = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprieta' associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \cdot n, n \cdot p, p \cdot q$, si ha
$$(AB)C = A(BC).$$
Questa affermazione si puo' dimostrare come segue. Da un lato si ha
$$\begin{aligned} ((AB)C)(i,j) &= \sum_{h=1}^{p} (AB)(i,h)C(h,j) \\ &= \sum_{h=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,h)C(h,j); \end{aligned}$$
dall'altro si ha
$$\begin{aligned} (A(BC))(i,j) &= \sum_{h=1}^{n} A(i,h)(BC)(h,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A(i,h)B(h,k)C(k,j); \end{aligned}$$
si osservi che scambiando l'ordine delle sommatorie e rinominando gli indici di sommatoria un'espressione si trasforma nell'altra.

Potremo cosi' scrivere un prodotto di piu' matrici senza usare parentesi. Gli elementi

$$(ABC)\,(i,j), \qquad i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,q,$$

della matrice ABC sono dati da

$$(ABC)\,(i,j) = \sum_{\substack{h=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,p}} A(i,h)B(h,k)C(k,j).$$

8. Sappiamo che il prodotto di due numeri reali non cambia invertendo l'ordine dei fattori, cioe' la moltiplicazione di numeri reali possiede la proprieta' commutativa. Ci chiediamo se questa proprieta' vale in qualche modo per la moltiplicazione di matrici.

   Consideriamo una matrice A di tipo $m \cdot n$, una matrice B di tipo $p \cdot q$, e ci chiediamo se
$$AB = BA.$$

   Osserviamo che: affiche' sia definito il prodotto AB deve essere $n = p$, affiche' sia definito il prodotto BA deve essere $q = m$; dunque A ha tipo $m \cdot n$ e B ha tipo $n \cdot m$. Cosi' si ha che AB ha tipo $m \cdot m$, e BA ha tipo $n \cdot n$. Affiche' AB sia uguale a BA, deve essere $m = n$; dunque A e B hanno entrambe tipo $m \cdot m$.

   In sintesi: affiche' AB possa essere uguale a BA, A e B devono essere entrambe quadrate dello stesso ordine.

   Due matrici quadrate dello stesso ordine non necessariamente commutano; ad esempio

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wa+xc & wb+xd \\ ya+zc & yb+zd \end{bmatrix}.$$

   In definitiva, la moltiplicazione di matrici non possiede la proprieta' commutativa.

9. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Per ogni numero naturale $p = 0, 1, 2, \ldots$, la potenza $p-$ma di una matrice A quadrata di ordine n e' definita da

$$A^p = \begin{cases} A\ A\ \cdots\ A \quad (p\ volte) & per\ p > 0 \\ \\ I_n & per\ p = 0 \end{cases} .$$

Valgono le proprieta'

$A^p A^q = A^{p+q}$;

$(A^p)^q = A^{pq}$;

la proprieta'

$(AB)^p = A^p B^p$

vale sotto al condizione che A e B siano permutabili, cioe' $AB = BA$.