Matematica II 23.11.11

Matrice inversa

1. Per $n = 1$, l'insieme $\mathbb{R}^{n \times n}$ delle matrici quadrate di ordine n diventa l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e la moltiplicazione di matrici diventa la moltiplicazione di numeri reali.

   In $\mathbb{R}$, il numero 1 e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto di 1 per un qualsiasi altro numero reale e' uguale a quell'altro numero reale:

   $1\ a = a = a\ 1, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

   L'inverso a^{-1} di un numero reale non nullo a e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto del numero reale per il suo inverso e' uguale a 1:

   $a\ a^{-1} = 1 = a^{-1}\ a.$

   Un'equazione lineare

   $ax = b$

   nell'incognita reale x e' determinata se e solo se $a \neq 0$, e in tal caso l'unica soluzione si ottiene moltiplicando entrambi i membri per a^{-1} :

   $a^{-1}ax = a^{-1}b; \qquad 1x = a^{-1}b; \qquad x = a^{-1}b.$

   In questa lezione vedremo come queste nozioni e questi fatti si estendono al caso delle matrici quadrate di un qualsiasi ordine $n \geq 1$.

2. **Matrice inversa**

   Definizione *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se esiste una matrice B quadrata di ordine n tale che*

   $$AB = I_n = BA,$$

   allora si dice che A e' invertibile, e che B e' una inversa di A

   Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se una matrice B quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla sinistra di A e se una matrice C

quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla destra di A, allora queste due matrici coincidono; infatti

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Dunque se A possiede un'inversa, questa e' unica; essa viene detta *la* matrice inversa di A, e viene denotata con

$$A^{-1}.$$

Nella discussione dei seguenti esempi usiamo un approccio diretto. Vedremo in seguito un metodo efficiente per decidere se una matrice e' invertibile o meno e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chiedersi se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} p+q & r+s \\ p+2q & r+2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p+q=1 \\ r+s=0 \\ p+2q=0 \\ r+2s=1 \end{cases}.$$

Questo sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite in realta' consiste di due sistemi di due equazioni in due incognite ciascuno. Dalle prima e terza equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite p, q :

$p = 2,$

$q = -1;$

dalla seconda e dalla quarta equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite r, s :

$r = -1,$

$s = 1;$

Dunque c'e' una ed una sola matrice inversa destra di A, ed e'

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che B e' anche inversa sinistra di A, dunque e' l'inversa di A :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chedersi se esiste una matrice

$$\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p + 2q = 1 \\ r + 2s = 0 \\ 2p + 4q = 0 \\ 2r + 4s = 1 \end{cases}.$$

Ora, la seconda e la quarta equazione di questo sistema sono incompatibili. Dunque A non possiede alcuna inversa destra, e a maggior ragione non possiede alcuna inversa.

Concludiamo questo paragrafo osservando due proprieta': se una matrice A e' invertibile, anche la sua inversa A^{-1} e' invertibile, e si ha

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$$

se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche il loro prodotto AB e' invertibile, e l'inversa di AB e' il prodotto delle inverse, nell'ordine opposto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Verifichiamo questa seconda proprieta':

$$\begin{aligned}(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \\ \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.\end{aligned}$$

3. **Matrici invertibili e sistemi determinati.**

Teorema 1. *Se una matrice A quadrata di ordine n possiede inversa, allora ciascun sistema lineare di n equazioni in n incognite*

$$Ax = b$$

con matrice dei coefficienti A e' determinato; inoltre, la sua unica soluzione e' data da

$$x = A^{-1}b.$$

Dimostrazione. Dal fatto che A^{-1} e' inversa sinistra di A, ricaviamo

$$\begin{aligned}Ax &= b \\ A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \\ \left(A^{-1}A\right)x &= A^{-1}b \\ I_nx &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b.\end{aligned}$$

Usando il fatto che A^{-1} e' inversa destra di A, mostriamo che questa e' davvero una soluzione:

$$A\left(A^{-1}b\right) = \left(AA^{-1}\right)b = I_nb = b.$$

cvd

Esempio. Sappiamo che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e' invertible e che

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per il Th. precedente, possimo dire che tutti i sistemi $Ax = b$ cioe'

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ x_1 + 2x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

sono determinati, e ciascuno di essi ha soluzione $x = A^{-1}b$, cioe'

$$\begin{cases} x_1 & = & 2b_1 - b_2 \\ x_2 & = & -b_1 + b_2 \end{cases}.$$

Il teorema precedente ha anche un inverso, che enunciamo senza dimostrare.

Teorema 2. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se tutti i sistemi lineari*

$$Ax = b$$

aventi matrice dei coefficienti A sono determinati, allora A e' invertibile.

Ora: abbiamo stabilito che una matrice quadrata e' invertibile se e solo se tutti i sistemi che la ammettono come matrice dei coefficienti sono determinati; in precedenza abbiamo stabilito che, genericamente, un sistema lineare quadrato e' determinato; ne concludiamo che, genericamente, una matrice quadrata e' invertibile.

4. **Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa.**

L'algoritmo di Gauss-Jordan puo' essere usato per decidere se una matrice e' invertible o meno e in caso affermativo calcolare in modo efficiente l'inversa.

Teorema *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Si consideri la matrice*

$$[A|I_n]$$

ottenuta affiancando ad A la matrice I_n unita' di ordine n. A questo matrice si applichi l'algoritmo di Gauss-Jordan, ottenendo cosi' una matrice della forma

$$[H|B].$$

- *se $H = I_n$, allora A e' invertibile, e $A^{-1} = B$;*
- *se $H \neq I_n$, allora A non e' invertibile.*

Esempio Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Affianchiamo ad A la matrice unita' I_2 :

$$\left[\ A \mid I_2\ \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

applichiamo l'algorimo di Gauss-Jordan, ottenendo prima

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

e poi

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\ I_2 \mid B\ \right].$$

Dunque A e' invertibile e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Affianchiamo ad A la matrice unita' I_3 :

$$\left[\ A \mid I_3\ \right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan otteneniamo prima la matrice a scala

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Osserviamo che la matrice a scala che compare nel blocco di sinistra ha 2 pivot; dopo aver completato l'applicazione dell'algoritmo di Gauss-Jordan, la matrice a scala ridotta che comparira' nel blocco di sinistra avra' ancora 2 pivot, e non potra' essere uguale a I_3.

Concludiamo che la matrice A non e' invertibile.

5. **Potenze**

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero realtivo $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la potenza $p-$ma della matrice A e' definita da

$$A^p = \begin{cases} A\ A\ \cdots\ A \quad (p \text{ volte}) & \text{per } p > 0 \\ I_n & \text{per } p = 0 \\ A^{-1}\ A^{-1}\ \cdots\ A^{-1} \quad (-p \text{ volte}) & \text{per } p < 0 \end{cases} ;$$

le potenze con esponente negativo sono dunque definite solo per matrici invertibili.

Esempio:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right]^{-2} &= \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right]^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{rr} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Valgono le usuali proprieta' delle potenze:

$A^p A^q = A^{p+q}$;

$(A^p)^q = A^{pq}$;

la proprieta'

$(AB)^p = A^p B^p$

vale sotto al condizione che A e B siano permutabili, cioe' $AB = BA$.

6. **Problema**

   Siano C_1 e C_2 due citta'. Consideriamo, a partire da un certo anno i numeri dei residenti in C_1 e C_2. Supponiamo che per un certo periodo, nel passaggio da ciascun anno al'anno successivo i numeri dei residenti in C_1 e C_2 varino secondo la seguente legge:

   - l' 80% dei residenti in C_1 mantengono la residenza in C_1, e il restante 20% dei residenti in C_1 prendono residenza in C_2;
   - il 30% dei residenti in C_2 prendono residenza in C_1, e il restante 70% dei residenti in C_2 mantengono la residenza in C_2;

   Ci chiediamo come evolvera' nel tempo la distribuzione degli abitanti nelle due citta'.

Indichiamo con $x_1(t)$ il numero dei residenti in C_1 all'anno t, e con $x_2(t)$ il numero dei residenti in C_2 all'anno t, per ogni $t = 0, 1, 2, \ldots$

La legge di variazione si puo' allora esprimere nella forma

$$\begin{cases} x_1(t+1) & = & 0.8x_1(t) + 0.3x_2(t) \\ x_2(t+1) & = & 0.2x_1(t) + 0.7x_2(t) \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

oppure, nel formalismo matriciale,

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

o, sinteticamente,

$$x(t+1) = A\ x(t).$$

Osserviamo che

$x(1) = A\ x(0)$

$x(2) = A\ x(1) = A^2\ x(0)$

$\vdots$

$x(p) = A\ x(p-1) = A^p\ x(0)$

$\vdots$

Il problema di determinare l'evoluzione della distribuzione degli abitanti nelle due citta' si traduce nel problema di dare una formula per le potenze della matrice, e magari studiarne il limite quando l'esponente tende a $+\infty$.