Matematica II, 25.11.11

Matrici scalari. Matrici diagonali

1. **Matrici scalari**

   Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ di tipo $m \times n$, e dato uno scalare r in $\mathbb{R}$, moltiplicando ciascun elemento di A per lo scalare r si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m \times n}$, detta matrice prodotto della matrice A per lo scalare r, ed indicata con
   $$rA.$$
   In simboli, si ha
   $$(rA)(i,j) = rA(i,j) \qquad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n.$$

   Esempio:
   $$7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$$

   La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione o la postmoltiplicazione di A per opportune matrici.

   Ad esempio, si ha
   $$\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

   In generale, la moltiplicazione di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione di A per la matrice

rI_m oppure come la postmoltiplicazione di A per la matrice rI_n :

$$rA = (rI_m)A = A(rI_n).$$

Per questa ragione, le matrici rI vengono dette *matrici scalari.*

2. **Matrici diagonali**

   Una matrice quadrata, come

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

   nella quale tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, viene detta *matrice diagonale.* Possiamo rappresentare una qualsiasi matrice diagonale di ordine n come

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

   scrivendo solo gli elementi sulla diagonale.

   Si verifica che premoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna riga r_i' di A per il corrispondente elemento diagonale a_i di D :

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1' \\ \hline r_2' \\ \hline \vdots \\ \hline r_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 r_1' \\ \hline a_2 r_2' \\ \hline \vdots \\ \hline a_n r_n' \end{bmatrix}$$

   Si verifica che postmoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna colonna c_i di A per il corrispondente elemento diagonale a_i di D :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1c_1 & a_2c_2 & \dots & a_nc_n \end{array} \right].$$

In particolare, il prodotto di due matrici diagonali e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice prodotto sono i prodotti degli elementi corrispondenti delle due matrici fattori:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{bmatrix}$$

Piu' in particolare, la potenza $t-$ma di una matrice diagonale e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice potenza $t-$ma sono le potenze $t-$me degli elementi della matrice:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^q = \begin{bmatrix} a_1^q & & & \\ & a_2^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^q \end{bmatrix}$$

Autovettori e autovalori - esempio

1. **Autovettori e autovalori - esempio**

   Mostriamo ora come il calcolo delle potenze della matrice non diagonale

   $$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

   possa essere ricondotto al calcolo delle potenze di una opportuna matrice diagonale.

   L'idea e' di rigurdare la matrice A come una funzione

   $$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \mapsto Ax \in \mathbb{R}^2.$$

Ci sono delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice: una e'

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

in quanto

$$Au = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = u;$$

un'altra e'

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

in quanto

$$Av = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5\ v.$$

In entrambi i casi, A agisce come la moltiplicazione per un numero reale:

$$Au = 1\ u, \qquad Av = 0.5\ v.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} A \left[\ u \mid v\ \right] &= \left[\ Au \mid Av\ \right] \\ &= \left[\ \quad u \mid 0.5\ v\ \right] \\ &= \left[\ u \mid v\ \right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto

$$P = \left[\ u \mid v\ \right], \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$

possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Ora, capita che la matrice

$$P = \left[\begin{array}{c|c} u & v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r|r} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$$

possiede inversa. Dunque possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$\begin{array}{rcl} A & = & PDP^{-1} \\ A^2 & = & PDP^{-1}PDP^{-1} = PDI_2DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ A^3 & = & PDP^{-1}PD^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\ \vdots & & \\ A^q & = & PD^qP^{-1} \\ \vdots & & \end{array}$$

Cosi' abbiamo

$$\begin{aligned} A^q &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix}^q \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & (0.5)^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= ... \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} lim_{q\to\infty} A^q &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Autovettori e Autovalori, caso generale

1. **Autovettori e autovalori**

   In generale, data una matrice A quadrata di ordine n, possiamo cercare delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice ...

   Definizione *Siano A una matrice quadrata di ordine n, $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$; se*

   $$Av = \lambda v,$$

   allora si dice che v e' un autovettore di A, e che λ e' un autovalore di A, associato a v.

   Se la matrice A possiede n autovettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, con rispettivi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, cioe' se

   $$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad \ldots \quad Av_n = \lambda_n v_n,$$

   allora si ha

   $$\begin{aligned} A \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \quad v_n \, \right] &= \left[\, Av_1 \mid Av_2 \mid \ldots \quad Av_n \, \right] \\ &= \left[\, \lambda_1 v_1 \mid \lambda_2 v_2 \mid \ldots \quad \lambda_n v_n \, \right] \\ &= \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \quad v_n \, \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   Indichiamo con P

   $$P = \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \quad v_n \, \right]$$

   la matrice quadrata di ordine n avente come colonne gli n autovettori v_i, ed indichiamo con D

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

la matrice diagonale di ordine n con elementi diagonali i corrispondenti autovalori λ_i.

Cosi' possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Se capita che la matrice

$$P = \left[\begin{array}{c|c|cc} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \right]$$

avente come colonne gli n autovettori possiede inversa, allora possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$A^q = PD^qP^{-1}.$$

2. Nel punto precedente abbiamo visto che, se una matrice A quadrata di ordine n possiede n autovettori che formano una matrice P invertibile, allora possiamo scrivere
$$A = PDP^{-1},$$
dove D e' la matrice diagonale degli autovalori.

Un'analisi sofisticata mostra che, genericamente, una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali o piu' in generale complessi, possiede nel campo complesso n autovalori distinti, corrispondenti di n autovettori ad elementi complessi che formano una matrice quadrata di ordine n invertibile.