Matematica II, 29.11.11

1. Siano m, n e p tre interi positivi fissati. Abbiamo visto come, date una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ed una matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, moltiplicando le varie righe righe di A per le varie colonne di B, si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times p}$, detta matrice prodotto di A per B ed indicata con AB. In simboli, si ha

$$(AB)(i,j) = \sum_{h=1}^{n} A(i,h)B(h,j), \qquad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,p.$$

Abbiamo visto come, dato un numero reale r in $\mathbb{R}$ e data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, moltiplicando ciascun elemento di A per r si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$, detta matrice prodotto del numero r per la matrice A, ed indicata con rA. In simboli, si ha

$$(rA)(i,j) = r\ A(i,j), \qquad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n.$$

Abbiamo notato che il prodotto di un numero reale per una matrice puo' essere realizzato come la moltiplicazione per matrici scalari:

$$rA = (rI_m)A = A(rI_n).$$

2. **Somma di due matrici.**

Siano m ed n due interi positivi fissati. Date due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ di tipo $m \times n$, sommando a ciascun elemento di A il corrispondente elemento di B, si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$, detta matrice somma di A e B ed indicata con

$$A + B.$$

In simboli, si ha

$$(A+B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j), \qquad i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n.$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 11 & 15 \\ 14 & 18 \end{bmatrix}$$

Nel caso $m = n = 1$ abbiamo l'usuale somma di numeri reali. L'addizione di matrici in $\mathbb{R}^{m\times n}$ possiede le stesse proprieta', associativa e commutativa, dell'addizione di numeri reali. Il ruolo che il numero zero gioca per l'addizione di numeri reali, per le matrici in $\mathbb{R}^{m\times n}$ e' giocato dalla matrice nulla

$$0_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

di tipo $m \times n$, nel senso che

$$0_{m,n} + A = A = A + 0_{m,n}, \qquad \textit{per ogni } A \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

3. **Sistemi lineari**

Le operazioni di addizione di matrici (colonna) e di moltiplicazione di matrici (colonna) per numeri reali permettono di rappresentare i sistemi lineari in una forma intermedia fra quella piu' estesa e quella piu' sintetica. Ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 10 \\ 4x + 5y &= 9 \\ 6x + 7y &= 8 \end{cases}$$

di tre equazioni nelle due incognite x, y puo' essere riscritto via via come

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \\ 6x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 4x \\ 6x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y \\ 5y \\ 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

apparendo cosi' come una equazione nelle incognite x, y, dove coefficienti e termine noto sono colonne in $\mathbb{R}^3$.

In generale, un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

di m equazioni in n incognite puo' essere risrcitto nella forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

apparendo cosi' come una equazione in n incognite, dove coefficienti e termine noto sono colonne in $\mathbb{R}^m$. Posto

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = a_j, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b$$

possiamo riscrivere l'equazione in breve

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

4. **Proprieta' distributive**

   L'operazione di moltiplicazione di matrici possiede le proprieta' distributive sinistra e destra rispetto all'addizione di matrici:

$$\begin{aligned} (A+B)C &= AC + BC \\ B(C+D) &= BC + BD \end{aligned}$$

   per ogni A, B matrici di tipo $m \times n$ e C, D matrici di tipo $n \times p$.

   Le operazioni di prodotto di matrici e di prodotto di uno scalare per una matrice sono legate dalla proprieta'

$$r(PQ) = (rP)Q = P(rQ)$$

   per ogni P, Q matrici moltiplicabili ed ogni scalare r.

Dimostriamo la proprieta' distributiva sinistra della moltiplicazione rispetto all'addizione di matrici. Per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, p$, da un lato si ha

$$\begin{aligned}((A+B)C)(i,j) &= \sum_{h=1}^{n} (A+B)(i,h)C(h,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} (A(i,h)+B(i,h))C(h,j),\end{aligned}$$

e dall'altro si ha

$$\begin{aligned}(AC+BC)(i,j) &= (AC)(i,j)+(BC)(i,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} A(i,h)C(h,j) + \sum_{h=1}^{n} B(i,h)C(h,j);\end{aligned}$$

la forma finale della prima espressione si puo' trasformare nella forma finale della seconda espressione, applicando la proprieta' distributiva (della moltiplicazione rispetto all'addizione di numeri reali) a ciascun addendo e spezzando la sommatoria.

5. **Espressioni matriciali**

Il calcolo delle espressioni matriciali puo' essere sviluppato in analogia col calcolo delle usuali espressioni algebriche, ma solo fino a un certo punto. Innanzitutto sia la moltiplicazione che l'addizione di matrici non sono sempre definite, poi la moltiplicazione non possiede la proprieta' commutativa.

Cio' comporta, ad esempio, che l'identita'

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

valida per a, b variabili reali, non lo e' piu' per variabili matriciali. Infatti per A, B matrici quadrate dello stesso ordine si ha

$$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2,$$

e AB e BA in generale non si elidono.

6. **Matrice trasposta**

Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A ed indicata con

$$A^T.$$

In simboli, si ha:

$$A^T(i,j) = A(j,i), \qquad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m.$$

Ad esempio, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Una matrice (quadrata) che coincide con la propria trasposta si dice "matrice simmetrica". Le matrici simmetriche quadrate del secondo ordine e del terzo ordine sono del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

7. L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

$\left(A^T\right)^T = A,$

per ogni matrice A;

$(A+B)^T = A^T + B^T$

per ogni coppia A, B di matrici sommabili;

$(AB)^T = B^T A^T$

per ogni coppia A, B di matrici moltiplicabili;

$(rA)^T = rA^T$

per ogni matrice A ed ogni scalare r.

Dimostriamo la proprieta' relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

$$(AB)^T = B^T A^T$$

e' consistente, cioe' che le matrici ai due lati dell'uguaglianza hanno lo stesso tipo. Infatti, da un lato, la matrice AB e' definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice $(AB)^T$ ha tipo $p \times m$; dall'altro, la matrice B^T ha tipo $p \times n$, la matrice A^T ha tipo $n \times m$, e la matrice $B^T A^T$ e' definita ed ha tipo $p \times m$.

Proviamo ora che

$$(AB)^T(i,j) = \left(B^T A^T\right)(i,j), \qquad i = 1, \dots, p;\ j = 1, \dots, m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned}(AB)^T(i,j) &= (AB)(j,i) \\ &= \sum_{h=1}^{n} A(j,h)B(h,i),\end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$\begin{aligned}\left(B^T A^T\right)(i,j) &= \sum_{h=1}^{n} B^T(i,h)A^T(h,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} B(h,i)A(j,h),\end{aligned}$$

e i due risultati sono uguali per la proprieta' commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Per finire, osserviamo che una matrice quadrata A e' invertibile se e solo se la sua trasposta A^T e' invertibile, inoltre l'inversa della trasposta e' la trasposta dell'inversa:

$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$

Ad esempio, da

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix},$

segue

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo questa proprieta'. "A e' invertibile ed ha inversa B" significa che

$AB = I = BA;$

trasponendo ciascun membro di queste uguaglianze, otteniamo

$(AB)^T = I^T = (BA)^T,$

da cui otteniamo

$B^T A^T = I = A^T B^T;$

queste ultime uguaglianze significano che "A^T e' invertibile ed ha inversa B^T".

Determinanti

1. Sia n un intero positivo fissato. Data una matrice A quadrata di ordine n

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n},$$

consideriamo i sistemi lineari

$$Ax = b \qquad (b \in \mathbb{R}^n)$$

aventi matrice dei coefficienti A. Possiamo chiederci sotto quali condizioni sugli elementi a_{ij} di A succede che tutti i sistemi sono determinati, e in tale caso se c'e' una formula che esprima la soluzione del sistema in funzione degli elementi a_{ij} di A e degli elementi b_i di b. A queste domande si puo' dare risposta attraverso il concetto di determinante.

2. Per $n = 1$, una matrice quadrata di ordine 1 consiste di un solo elemento

$$A = [a],$$

definiamo il determinante $\mathrm{D}(A)$ di A ponendo:

$$\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}[a] = a.$$

3. **Determinante (II ordine)**

Per $n = 2$, data la matrice quadrata del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

definiamo il determinante $\mathrm{D}(A)$ di A ponendo:

$$\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Si osservi che

$$\mathrm{D}\left(A^T\right) = \mathrm{D}(A);$$

inoltre, si ha

$$\mathrm{D}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

4. **Proprieta' del determinante**

Possiamo parametrizzare una matrice del secondo ordine con 4 numeri in $\mathbb{R}$, ma anche con 2 vettori colonna in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right], \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del secondo ordine come una funzione di due variabili in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right], \qquad a, b \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

In quest'ottica, il determinante del secondo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a+c & b \end{array} \right] &= \mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] + \mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} c & b \end{array} \right] \\
\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b+c \end{array} \right] &= \mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] + \mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & c \end{array} \right] \\
\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} ra & b \end{array} \right] &= r\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] \\
\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & rb \end{array} \right] &= r\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] \\
\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & a \end{array} \right] &= 0 \\
\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} b & a \end{array} \right] &= -\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right]
\end{aligned}$$

per ogni a, b, c vettori colonna in $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Ad esempio, la seconda proprieta' si puo' verificare cosi':

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} ra & b \end{array} \right] &= \mathrm{D}\begin{bmatrix} ra_1 & b_1 \\ ra_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= ra_1 b_2 - ra_2 b_1 = r\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= r\mathrm{D}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= r\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right].
\end{aligned}$$

La penultima proprieta' si verica immediatamente:

$$\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & a \end{array}\right] = \mathrm{D}\left[\begin{array}{cc} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{array}\right] = a_1a_2 - a_2a_1 = 0.$$

5. **Regola di Cramer**

Sia

$$\left[\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array}\right]$$

una matrice quadrata del secondo ordine, con $\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array}\right] \neq 0$.
Allora tutti i sistemi

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1x + b_1y & = & p_1 \\ a_2x + b_2y & = & p_2 \end{array}\right. ,$$

in breve

$$ax + by = p,$$

sono determinati, inoltre la soluzione e' data da

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} p & b \end{array}\right]}{\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array}\right]} \\ y & = & \dfrac{\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & p \end{array}\right]}{\mathrm{D}\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array}\right]}. \end{array}$$

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + 6y = 10 \\ 7x + 9y = 11 \end{array}\right. ,$$

che possiamo riscrivere come

$$\left[\begin{array}{c} 5 \\ 7 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{c} 6 \\ 9 \end{array}\right] y = \left[\begin{array}{c} 10 \\ 11 \end{array}\right].$$

Il determinate della matrice dei coefficienti e'

$$\mathrm{D}\left[\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{array}\right] = 5 \cdot 9 - 7 \cdot 6 = 3,$$

dunque per il Th. di Cramer il sistema e' determinato, e la sua soluzione e' data da

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathrm{D}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}}{\mathrm{D}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}} = \frac{24}{3} = 8 \\ y &= \frac{\mathrm{D}\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}}{\mathrm{D}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}} = \frac{-15}{3} = -5. \end{aligned}$$

La regola di Cramer si puo' ricavare dalle proprieta' del determinante nel modo seguente.

Osserviamo che una soluzione del sistema lineare

$$ax + by = p,$$

deve essere anche soluzione dell'equazione

$$\mathrm{D}\left[\ ax+by \mid b\ \right] = \mathrm{D}\left[\ p \mid b\ \right],$$

al cui primo membro si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\left[\ ax+by \mid b\ \right] &= \mathrm{D}\left[\ ax \mid b\ \right] + \mathrm{D}\left[\ by \mid b\ \right] \\ &= x\mathrm{D}\left[\ a \mid b\ \right] + y\mathrm{D}\left[\ b \mid b\ \right] \\ &= x\mathrm{D}\left[\ a \mid b\ \right]. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita x

$$x\mathrm{D}\left[\ a \mid b\ \right] = \mathrm{D}\left[\ p \mid b\ \right],$$

e in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$y\mathrm{D}\left[\ a \mid b\ \right] = \mathrm{D}\left[\ a \mid p\ \right].$$

Se $\mathrm{D}(A) \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente entrambe le incognite, ed ottenere

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathrm{D}\left[\ p \mid b\ \right]}{\mathrm{D}\left[\ a \mid b\ \right]} \\ y &= \frac{\mathrm{D}\left[\ a \mid p\ \right]}{\mathrm{D}\left[\ a \mid b\ \right]}. \end{aligned}$$

Si verifica che questa e' davvero una soluzione.

6. **Moltiplicazione, matrice inversa**

   Il determinante si comporta bene rispetto alla moltiplicazione di matrici: per ogni A, B matrici quadrate del II ordine si ha

$$\mathrm{D}(AB) = \mathrm{D}(A)\mathrm{D}(B);$$

   questo fatto puo' essere verificato direttamente, con dei conti piuttosto laboriosi.

   Osserviamo che, se A e' una matrice invertibile, allora per $B = A^{-1}$ si ha

$$1 = \mathrm{D}(I_2) = \mathrm{D}(AB) = \mathrm{D}(A)\mathrm{D}(B)$$

   dunque

$$\mathrm{D}(A) \neq 0.$$

   Viceversa, una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

   con $\mathrm{D}(A) \neq 0$, e' invertibile, e la sua inversa e' data da

$$A^{-1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

   Questo fatto si puo' verificare direttamente, con semplici calcoli.