# Matematica II 30.11.11

1. Il determinante di una matrice del secondo ordine puo' essere indicato in vari modi, ad esempio con

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad o \qquad \mathrm{D}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad o \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

   Analoghe notazioni si usano per matrici di ordine superiore.

2. **Determinante (III ordine)**

   Il determinante di una matrice quadrata del terzo ordine puo' essere definito come il risultato comune di tre espressioni, una per ciascuna delle tre colonne della matrice. Queste espressioni vengono dette *sviluppi di Laplace* del determinante.

   Ad esempio, il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

   e' dato da uno qualsiasi dei seguenti sviluppi di Laplace:

   - rispetto alla prima colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 10 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 10 - 8 \cdot 3) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -3;$$

   - rispetto alla seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (4 \cdot 10 - 7 \cdot 6) + 5 \cdot (1 \cdot 10 - 7 \cdot 3) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = -3;$$

- rispetto alla terza colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) - 6 \cdot (1 \cdot 8 - 7 \cdot 2) + 10 \cdot (1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = -3.$$

In generale, il determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

e' dato da uno qualsiasi dei seguenti sviluppi di Laplace:

- rispetto alla prima colonna:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2.$$

- rispetto alla seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= -b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1)$$

$$= -b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + b_2a_1c_3 - b_2a_3c_1 - b_3a_1c_2 + b_3a_1c_2.$$

- rispetto alla terza colonna:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 - c_2a_1b_3 + c_2a_3b_1 + c_3a_1b_2 - c_3a_1b_2.$$

I risultati dei tre sviluppi sono tre scritture diverse di un'unico polinomio, omogeneo di terzo grado negli elementi della matrice, costituito da 6 termini.

Si verifica che il determiante di una matrice e' uguale al determinate della matrice trasposta:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dunque, il determinante del terzo ordine ha tre sviluppi di Laplace per colonne e tre sviluppi di Laplace per righe.

3. Osserviamo che

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3,$$

cioe' il determinante di una matrice triangolare superiore e' il prodotto degli elementi della sua diagonale. In particolare, si ha

$$|I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

4. **Proprieta'**

Possiamo riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine sia come una funzione di 9 variabili in $\mathbb{R}$ che come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix}, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+d, & b, & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d, & b, & c \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} ra, & b, & c \end{vmatrix} &= r\begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a, & b+d, & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & d, & c \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a, & rb, & c \end{vmatrix} &= r\begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a, & b, & c+d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & b, & d \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a, & b, & rc \end{vmatrix} &= r\begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a, & a, & b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a, & b, & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & a \end{vmatrix} = 0 \\
\begin{vmatrix} b, & a, & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} c, & b, & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & c, & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

per ogni $a,b,c,d$ vettori colonna in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ed ogni scalare $r$ in $\mathbb{R}$.

Possiamo riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine anche come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^{1\times 3}$ :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}, \qquad a',b',c' \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

Poiche' il determinante e' invariante per trsposizione, si hanno proprieta' per righe analoghe alle proprieta' per colonne sopra esposte.

5. **Regola di Cramer**

   Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, con $\begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix} \neq 0$. Allora tutti i sistemi lineari

$$ax + by + cz = p, \qquad p \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

   sono determinati, inoltre la soluzione e' data da

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} p, & b, & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix}} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a, & p, & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix}} \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} a, & b, & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b, & c \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

   Questa regola per la risoluzione dei sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite si puo' ricavare dalle proprieta' del determinante del terzo ordine, cosi' come la regola per la risoluzione dei sistemi lineari di 2 equazioni in 2 incognite si e' ricavata dalle proprieta' del determinante del secondo ordine.

6. Le proprieta' del determinate rispetto alle righe ci permettono di descrivere l'effetto che ciascuna delle operazioni elementari sulle righe di una matrice ha sul determinante della matrice:

   - l'operazione di scambiare due righe ha come effetto di cambiare il segno del determinante;
   - l'operazione di moltiplicare una riga per uno scalare $r \in \mathbb{R}$ ha come effetto di moltiplicare il determinante per $r$;
   - l'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga lascia invariato il determinante.

   Le prime due affermazioni sono chiare. Verifichiamo la terza, nel caso delle prime due righe.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a' \\ b' + ra' \\ c' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ ra' \\ c' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} a' \\ a' \\ c' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Grazie a questa proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica $A$ trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare $T$, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di $T$, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

Ad esempio:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.
$$

7. **Moltiplicazione, matrice inversa**

Il determinante si comporta bene rispetto alla moltiplicazione di matrici: per ogni $A, B$ matrici quadrate del III ordine si ha

$$\mathrm{D}(AB) = \mathrm{D}(A)\mathrm{D}(B);$$

questo fatto puo' essere verificato direttamente, con dei conti decisamente laboriosi.

Osserviamo che, se $A$ e' una matrice invertibile, allora per $B = A^{-1}$ si ha

$$1 = \mathrm{D}(I_2) = \mathrm{D}(AB) = \mathrm{D}(A)\mathrm{D}(B)$$

dunque

$$\mathrm{D}(A) \neq 0.$$

Viceversa, una matrice $A$ con $|A| \neq 0$ e' invertibile, e si puo' dare una formula esplicita della sua inversa in funzione del determinate di $A$ e dei determinati di tutte le matrici del II ordine ottenute cancellando una riga ed una colonna di $A$.

8. **Applicazione.**

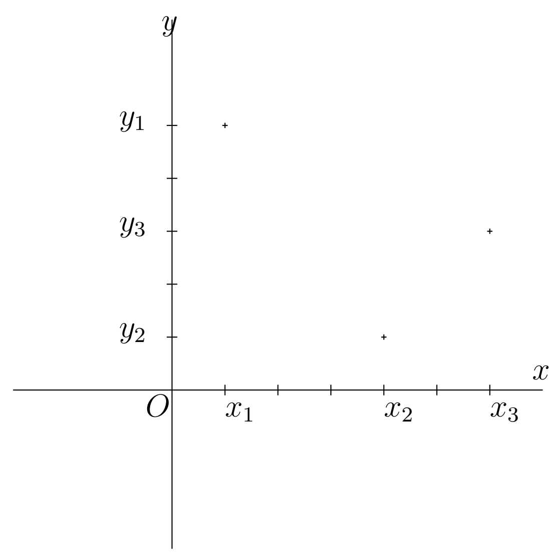
   Sono dati sei numeri reali $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$, e si vuole determinare un polinomio

   $f(x) = a + bx + cx^2$

   tale che

   $f(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$

   Ci si chiede: sotto quali condizioni esiste un tale polinomio? nei casi in cui esiste, ne esiste esattamente uno? nei casi in cui ne esiste esattamente uno, in che modo i coefficienti del polinomio dipendono dai dati iniziali?




   Per evitare condizioni fra loro contraddittorie, o ripetute, imponiamo che i tre numeri $x_1, x_2, x_3$ siano a due a due distinti:

   $x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3.$

Ora, le tre condizioni imposte si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a + bx_1 + cx_1^2 & = y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 & = y_2 \\ a + bx_3 + cx_3^2 & = y_3 \end{cases}$$

nelle incognite $a, b, c$. Calcoliamo ora il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Sotto le condizioni imposte

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3,$

questo determinante e' non nullo. Dunque il sistema lineare ha, per ogni valore di $y_1, y_2, y_3$, esattamente una soluzione, data da

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\
b &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 \end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\
c &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.
\end{aligned}
$$