**Matematica II, 02.12.11**

1. **Determinante di ordine $n$.**

   Definiamo il determinante $|A|$ di una matrice quadrata $A$ di un qualsiasi ordine $n \geq 1$ in modo ricorsivo.

   - Per $n = 1$, per ogni matrice $A = [a_{11}]$ di ordine 1, definiamo
   $$|A| \;=\; a_{11};$$
   - Per $n > 1$, supponiamo di avere definito il determinante per una qualsiasi matrice di ordine $n-1$, e definiamo il determinante per una qualsiasi matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ di ordine $n$ nel modo seguente.

     Per ogni $i, j = 1, \ldots, n$ indichiamo con $|A_{ij}|$ il determinate della matrice di ordine $n-1$ ottenuta dalla matrice $A$ cancellando la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma:
   $$|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \cancel{a_{1j}} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \cancel{a_{nj}} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

     Definiamo

     $$|A| = \;\; a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{21} \cdot |A_{21}| + a_{31} \cdot |A_{31}| - \cdots \pm a_{n1} \cdot |A_{n1}| \qquad \textit{oppure}$$

     $$|A| = -\, a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{22} \cdot |A_{22}| - a_{32} \cdot |A_{32}| + \cdots \pm a_{n2} \cdot |A_{n2}|\,. \qquad \textit{oppure}$$

     $$|A| = \;\; a_{13} \cdot |A_{13}| - a_{23} \cdot |A_{23}| + a_{33} \cdot |A_{33}| - \cdots \pm a_{n3} \cdot |A_{n3}|\,, \qquad \textit{oppure}$$

     $$\vdots$$

     Queste espressioni vengono dette *sviluppi di Laplace* del determinante di $A$ rispetto alla prima, seconda, terza, ... colonna. Questi sviluppi sono $n$ scritture diverse di un'unico polinomio, omogeneo di grado $n$ negli elementi della matrice, costituito da $n!$ termini.

Si dimostra che questa definizione e' ben posta.

Si prova inoltre che il determinante di una matrice coincide col determinante della sua trasposta. Dunque, il determinante di ordine $n$ ha $n$ sviluppi di Laplace per colonne e $n$ sviluppi di Laplace per righe.

2. Per una matrice triangolare si ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Dunque, il determinante di una matrice triangolare e' il prodotto dei suoi elementi diagonali. Tale determinate e' diverso da zero se e soltanto se tutti gli elementi diagonali sono diversi da zero, cioe' la matrice triangolare e' nondegenere.

Il determinante della matrice $I_n$ unita' di ordine $n$ vale 1.

3. **Proprieta' dei determinanti.**

Sia $n$ un intero positivo arbitrariamenente fissato. Il determinante della generica matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ quadrata di ordine $n$ puo' essere visto come una funzione

$$|a_1, \dots, a_j, \dots, a_n|$$

delle $n$ colonne $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ di $A$.

Come tale, il determinante e' caratterizzato dalle seguenti proprieta'

- per $1 \leq j \leq n$ e $a_j = a'_j + a''_j$, si ha:

$$|a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n| = \left|a_1, \ldots, a'_j, \ldots, a_n\right| + \left|a_1, \ldots, a''_j, \ldots, a_n\right| ;$$

- per $1 \leq j \leq n$ e $a_j = ra'_j$, si ha:

$$|a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n| = r \left|a_1, \ldots, a'_j, \ldots, a_n\right| ;$$

- per $1 \leq p < q \leq n$ e $a_p = a_q$, si ha:

$$|a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n| = 0;$$

- per $1 \leq p < q \leq n$ si ha:

$$|a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n| = - |a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p, \ldots, a_n| .$$

Valgono analoghe proprieta' per le righe.

4. **Th. (Cramer)**

*Sia* $A = [a_1, \ldots, a_n]$ *una matrice quadrata di ordine* $n$ *con colonne* $a_1, \ldots, a_n$ *e sia*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = p$$

*un qualsiasi sistema lineare con matrice dei coefficienti* $A$.

- *se* $|A| \neq 0$, *allora il sistema e' determinato; inoltre*

$$x_i = \frac{|a_1, \ldots, p \ , \ldots, a_n|}{|a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n|}, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

- *se* $|A| = 0$, *allora il sistema e' impossibile, o indeterminato.*

La prima parte dell'enunciato si dimostra usando le proprieta' del determinante, in modo analogo al modo descritto nel caso $n = 2$; non dimostriamo la seconda parte dell'enunciato.

Da questo teorema deriva direttamente il teorema sui sistemi omogenei

**Th.** *Sia* $A$ *una matrice quadrata di ordine* $n$ *e sia*

$$Ax = 0_n$$

*il sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti* $A$.

- *se* $|A| \neq 0$, *allora il sistema e' determinato, ed ha solo la soluzione banale* $x = 0_n$;
- *se* $|A| = 0$, *allora il sistema e' indeterminato, e possiede qualche soluzione non banale* $x \neq 0_n$.

5. **Determinanti, operazioni elementari e algoritmo di Gauss.**

   Le proprieta' del determinate ci permettono di descrivere l'effetto che ciascuna delle operazioni elementari sulle righe di una matrice ha sul determinante della matrice:

   - l'operazione di moltiplicare una riga per uno scalare $r \in \mathbb{R}$ ha come effetto di moltiplicare il determinante per $r$;
   - l'operazione di scambiare due righe ha come effetto di cambiare il segno del determinante;
   - l'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga lascia invariato il determinante.

   Grazie a queste proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica $A$ trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare $T$, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di $T$, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

6. **Moltiplicazione, matrice inversa**

   Si dimostra che determinante si comporta bene rispetto alla moltiplicazione di matrici: per ogni $A, B$ matrici quadrate di ordine $n$ si ha

   $$|AB| = |A||B|.$$

   Osserviamo che, se $A$ e' una matrice invertibile, allora per $B = A^{-1}$ si ha

   $$1 = |I_n| = |AB| = |A||B|,$$

   dunque

   $$|A| \neq 0.$$

   Viceversa, una matrice $A$ con $|A| \neq 0$ e' invertibile, e si puo' dare una formula esplicita della sua inversa in funzione del determinate di $A$ e dei determinati di tutte le matrici di ordine $n-1$ ottenute cancellando una riga ed una colonna di $A$.

### Autovalori e autovettori

1. Sia $A$ una matrice quadrata di ordine $n$. Ricordiamo che un vettore colonna non nullo $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ si dice autovettore di $A$ se $A$ agisce su $v$ come la moltiplicazione per uno scalare:

   $$Av = \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

   lo scalare $\lambda$ si dice autovalore di $A$ associato all'autovettore $v$. Uno scalare si dice autovalore di $A$ se e' l'autovalore associato a qualche autovettore di $A$.

   Osserviamo che a ciascun autovettore e' associato un solo autovalore. Infatti, se $\lambda$ e $\mu$ sono entrambi autovalori associati ad uno stesso autovettore $v$ di $A$, cioe' se

   $Av = \lambda v, \qquad Av = \mu v,$

   allora si ha l'uguaglianza

   $\lambda v = \mu v,$

   che si puo' riscrivere nella forma

   $(\lambda - \mu)v = 0,$

   che a sua volta, poiche' $v \neq 0$, implica

   $\lambda - \mu = 0, \qquad cioe' \qquad \lambda = \mu.$

2. Riconsideriamo la matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix},$$

   che possiede un autovettore $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ con autovalore associato $\lambda = 1$ :

   $Au = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot u;$

e possiede un autovettore $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con autovalore associato $\lambda = 0.5$ :

$$Av = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \cdot v.$$

3. Iniziamo a chiederci come si possano ricavare gli autovettori di $A$ cui e' associato l'autovalore $\lambda = 0.5$. Tali autovettori sono i vettori colonna $x \neq 0$ caratterizzati dalla condizione

   $$Ax = 0.5\ x,$$

   che si puo' riscrivere

   $$Ax - 0.5\ x = 0_2,$$

   o

   $$Ax - 0.5\ I_2 x = 0_2,$$

   o

   $$(A - 0.5\ I_2)x = 0_2.$$

   Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

   $$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

   che si riduce alla sola equazione lineare omogenea

   $$0.3x_1 + 0.3x_2 = 0.$$

   Ora, le soluzioni di questa equazione sono del tipo

   $$\begin{array}{l} x_1 = -x_2 \\ x_2 = \ qualsiasi \end{array}.$$

   Questi vettori, con $x_2 \neq 0$, sono tutti e soli gli autovettori di $A$ cui e' associato l'autovalore $\lambda = 0.5$; in particolare, per $x_2 = 1$ ritroviamo l'autovettore $v$.

4. Ci chiediamo ora come si possono determinare gli autovalori di $A$. Uno scalare $\lambda$ sara' un autovalore della matrice $A$ se esistono in $\mathbb{R}^2$ dei vettori non nulli $x \neq 0$ che soddisfano la condizione

   $$Ax = \lambda x,$$

   che si puo' riscrivere

   $$Ax - \lambda x = 0,$$

   o

   $$Ax - \lambda I_2 x = 0,$$

   o

   $$(A - \lambda I_2)x = 0.$$

   Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

   $$\begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se

   $$\begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

   cioe' se e solo se $\lambda$ e' soluzione dell'equazione di secondo grado

   $$(0.8 - \lambda)(0.7 - \lambda) - 0.3 \cdot 0.2 = 0,$$

   cioe'

   $$\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.5 = 0.$$

   Ora, le soluzioni di questa equazione sono

   $$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0.5.$$

   Abbiamo cosi' ritrovato i due autovalori della matrice $A$ che sono associati agli autovettori $u$ e $v$; possiamo inoltre affermare che $A$ non possiede altri autovalori al di fuori di 1 e 0.5.

5. Sia ora $A$ una matrice quadrata di ordine $n$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uno scalare $\lambda$ sara' un autovalore della matrice $A$ se esistono dei vettori colonna $x \neq 0$ che soddisfano la condizione

$Ax = \lambda x,$

che si puo' riscrivere

$Ax - \lambda x = 0,$

o

$Ax - \lambda I_n x = 0,$

o

$(A - \lambda I_n)x = 0.$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo di $n$ equazioni in $n$ incognite

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Il polinomio che compare al primo membro di questa equazione e' detto *polinomio caratteristico* della matrice $A$; e' un polinomio di grado $n$ pari all'ordine della matrice.

Abbiamo cosi' provato il

**Th.** *Gli autovalori di una matrice quadrata $A$ sono le radici del polinomio caratteristico di $A$.*

Dunque una matrice quadrata di ordine $n$ possiede al piu' $n$ autovalori reali, e possiede esattamente $n$ autovalori complessi (contando ciascuno con la sua molteplicita').