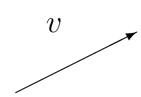
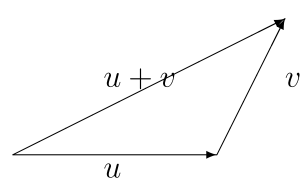
Matematica II, 06.12.11

1. **Vettori nel piano.**

   Col termine "vettore" intendiamo un segmento con un verso di percorrenza privilegiato, avente cosi' un primo estremo ed un ultimo estremo. Rappresentiamo ciascun vettore con con una freccia avente origine nel primo estremo e termine nel secondo estremo.

   Dati un vettore u ed un vettore v tali che il termine di u coincida con l'origine di v, i punto origine di u e il punto termine di v individuano un vettore, detto vettore somma di u e v ed indicato con $u + v$; se il termine di u non coincide con l'origine di v, il vettore somma non e' definito.

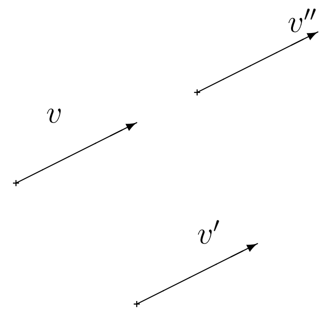
   

   Diciamo che due vettori v e v' sono *equivalenti*, e scriviamo

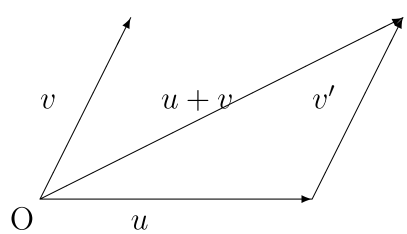
   $$v \sim v'$$

   quando v e v' hanno la stessa lunghezza, direzione, e verso; cio' capita se e solo se i segmenti dei due vettori, il segmento congiungente le loro origini, e il segmento congiungente i loro termini, formano un parallelogramma, eventualmente degenere.

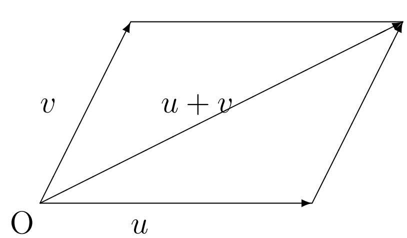
   Dati un vettore v e un punto, c'e' uno ed un solo vettore che ha origine nel punto ed e' equivalente a v.



2. Fissato nel piano un punto O, consideriamo l'insieme $\mathfrak{P}_O$ dei vettori con origine in O. Dati due vettori $u, v \in \mathfrak{P}_O$, definiamo il vettore somma $u + v$ di u e v ponendo
$$u + v = u + v',$$
dove v' e' il vettore equivalente a v avente origine nel termine di u :



Equivalentemente, il vettore somma $u+v$ si puo' ottenere considerando il parallelogramma che ammette u e v come lati, e prendendo la diagonale uscente da O:



Questa operazione di addizione di vettori risulta essere commutativa e associativa:

$u + v = v + u,$

$(u + v) + w = u + (v + w),$

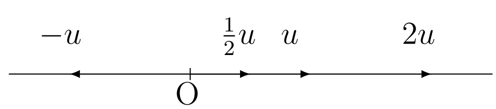
per ogni terna di vettori $u, v, w \in \mathfrak{P}_O$.

Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore ridotto al solo punto O; questo vettore viene detto vettore nullo, e viene indicato col simbolo 0; in generale, quando questo simbolo comparira' in una espresssione, risultera' chiaro dal contesto se rappresenta il vettore nullo o il numero zero. La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni v, il suo simmetrico rispetto ad O viene indicato con $-v$.

3. Dato un vettore $v \in \mathfrak{P}_O$, c'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per v : per un numero intero relativo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ si pone

$$nv = \begin{cases} v + \quad v + \cdots + \quad v & n \textit{ volte} & \textit{per } n > 0 \\ 0 & & \textit{per } n = 0 \\ (-v) + (-v) + \cdots + (-v) & -n \textit{ volte} & \textit{per } n < 0 \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori con origine O, che fornisce un vettore con origine O, e la moltiplicazione di un vettore con origine O per uno scalare reale, che fornisce ancora un vettore con origine O.

Queste operazioni sono legate dalle proprieta' pseudodistributive

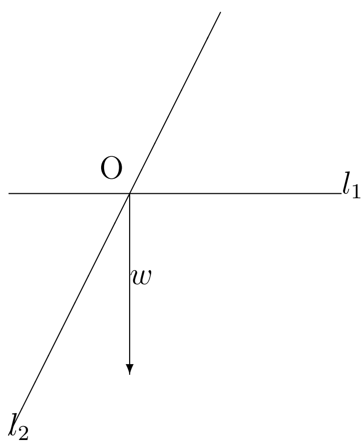
$$r(u + v) = ru + rv,$$
$$(r + s)v = rv + sv,$$

per ogni $u, v \in \mathfrak{P}_0$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

Il calcolo con queste due operazioni gode cosi' delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due nature, vettori e scalari, possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per scalari, ma non possiamo sommare vettori con scalari, ne' moltiplicare vettori per vettori.

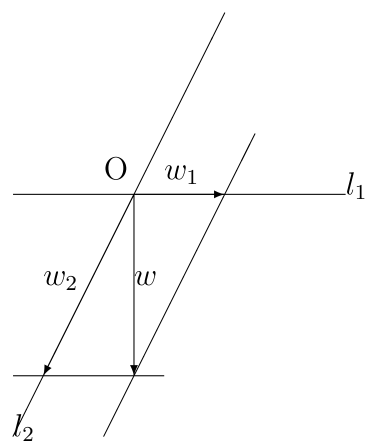
L'insieme $\mathfrak{P}_0$, munito di queste operazioni, viene detto *piano vettoriale geometrico con origine* O.

4. Date due diverse rette l_1, l_2 passanti per O, si ha che ogni vettore $w \in \mathfrak{P}_O$ si puo' scrivere come somma di un vettore $w_1 \in \mathfrak{P}_O$ che giace sulla retta l_1 e di un vettore $w_2 \in \mathfrak{P}_O$ che giace sulla retta l_2.



Il vettore w_1 si puo' ottenere nel modo seguente: si considera la retta parallela ad l_2 passante per il termine di w, si considera il punto di intersezione di questa retta con l_1 e infine si prende il vettore con origine O e termine in questo punto.

Il vettore w_2 si puo' ottenere nel modo seguente: si considera la retta parallela ad l_1 passante per il termine di w, si considera il punto di intersezione di questa retta con l_2 e infine si prende il vettore con origine O e termine in questo punto.



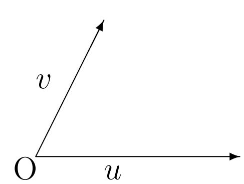
5. Data una sequenza di un certo numero di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathfrak{P}_0$ ed una sequenza dello stesso numero di scalari $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_m v_m,$$

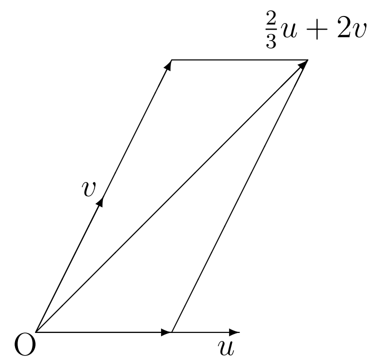
detto *combinazione lineare* dei vettori dati; il numero reale r_i viene detto *coefficiente* del vettore v_i nella combinazione lineare.

Esempio

- La combinazione lineare dei vettori u, v



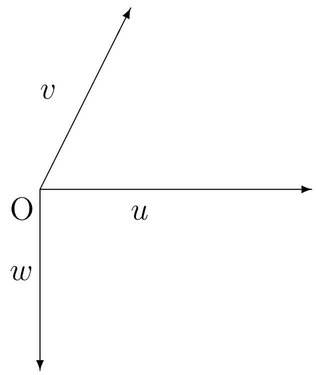
con coefficienti rispettivi $\frac{2}{3}$ e 2 da' come risultato il vettore



Si ha che

> se $u \in \mathfrak{P}_0$ e' un vettore $\neq 0$, allora ogni multiplo scalare di u giace sulla retta individuata da u; viceversa, ogni vettore $w \in \mathfrak{P}_0$ che giace su questa retta si puo' scrivere come multiplo scalare di u :
>
> $$w = ru,$$
>
> per un opportuno scalare $r \in \mathbb{R}$.
>
> se $u, v \in \mathfrak{P}_0$ non sono allineati, allora ogni $w \in \mathfrak{P}_0$ si puo' scrivere come combinazione lineare di u, v :
>
> $$w = ru + sv,$$
>
> per opportuni scalari $r, s \in \mathbb{R}$.

Per esercizio si determini una stima dei coefficienti che permettono di ottenere il vettore w come combinazione lineare dei vettori u, v, secondo la figura seguente.



6. Siano $v_1, \ldots, v_m, w \in \mathfrak{P}_O$; se w si puo' scrivere come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$, allora diciamo che w *dipende* da $v_1, \ldots, v_m$; se w non si puo' scrivere come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$, allora diciamo che w e' *indipendente* da $v_1, \ldots, v_m$.

   I fatti evidenziati nel punto precedente possono allora essere espressi nella forma seguente.

   - per ogni $v, w \in \mathfrak{P}_O$, con $v \neq 0$, si ha: se w giace sulla retta individuata da v, allora w dipende da v, se w non giace da su tale retta, allora w e' indipendenta da v;
   - per ogni $v_1, v_2, w \in \mathfrak{P}_O$, con v_1, v_2 non allineati, si ha: w dipende da v_1, v_2.

7. **Vettori nello spazio**

   I concetti definiti nel piano (vettore, somma di vettori, moltiplicazione di uno scalare per un vettore, combinazione lineare, dipendenza, indipendenza) si estendono in modo naturale allo spazio. L'insieme $\mathfrak{S}_0$ dei vettori dello spazio con origine in un punto fissato O, munito delle operazioni di somma di vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore, viene detto *spazio vettoriale geometrico con origine* O.

8. Dati un piano π_1 e una retta l_2 passanti per O, tali che π_1 non contenga l_2, si ha che ogni vettore $w \in \mathfrak{S}_O$ si puo' scrivere come somma

$$w = w_1 + w_2$$

di un vettore w_1 che giace sul piano π_1 e di un vettore w_2 che giace sulla retta l_2.

Il vettore w_1 si puo' ottenere nel modo seguente: si considera la retta parallela ad l_2 passante per il termine di w, si considera il punto di intersezione di questa retta col piano π_1 e infine si prende il vettore con origine O e termine in questo punto.

Il vettore w_2 si puo' ottenere nel modo seguente: si considera il piano parallelo a π_1 passante per il termine di w, si considera il punto di intersezione di questo piano con la retta l_2 e infine si prende il vettore con origine O e termine in questo punto.

9. Si ha che

> se $v \in \mathfrak{S}_0$ e' un vettore $\neq 0$, allora ogni multiplo scalare di v giace sulla retta individuata da v; viceversa, ogni vettore w che giace su questa retta si puo' scrivere come multiplo scalare di v :
>
> $$w = rv,$$
>
> per un opportuno scalare $r \in \mathbb{R}$.
>
> se $v_1, v_2 \in \mathfrak{S}_0$ non sono allineati, allora ogni combinazione lineare di v_1, v_2 giace sul piano individuato da v_1, v_2; viceversa, ogni vettore w che giace su questo piano si puo' scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2 :
>
> $$w = r_1v_1 + r_2v_2,$$
>
> per opportuni scalari $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
>
> se $v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{S}_0$ non sono complanari, allora ogni vettore w si puo' scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 :
>
> $$w = r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3,$$
>
> per opportuni scalari $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$.

Il terzo punto deriva dalla seguente osservazione. Il vettore w si puo' scomporre nella somma di un vettore w_{12} che giace sul piano individuato da v_1 e v_2 e di un vettore w_3 che giace sulla retta individuata da v_3 :

$$w = w_{12} + w_3;$$

il vettore w_{12} si puo' scrivere come combinazione lineare di v_1 e v_2 :

$$w_{12} = r_1 v_1 + r_2 v_2;$$

il vettore w_3 si puo' scrivere come multiplo scalare di v_3 :

$$w_3 = r_3 v_3;$$

cosi' in definitiva si ha

$$w = w_{12} + w_3 = r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3.$$

10. I fatti evidenziati nel punto precedente possono essere espressi nella forma seguente.

    - per ogni $v, w \in \mathfrak{S}_O$, con $v \neq 0$, si ha: se w giace sulla retta individuata da v, allora w dipende da v, se w non giace da su tale retta, allora w e' indipendenta da v;
    - per ogni $v_1, v_2, w \in \mathfrak{S}_O$, con v_1, v_2 non allineati, si ha: se w giace sul piano individuato da v_1, v_2, allora w dipende da v_1, v_2, se w non giace da su tale piano, allora w e' indipendente da v_1, v_2;
    - per ogni $v_1, v_2, v_3, w \in \mathfrak{S}_O$, con v_1, v_2, v_3 non complanari, si ha: w dipende da v_1, v_2, v_3.