**Matematica II, 07.12.11**

1. **Identificazione fra $\mathfrak{P}_O$ e $\mathbb{R}^2$**

   Fissato nel piano un punto O, consideriamo il piano vettoriale geometrico con origine in O, cioe' l'insieme $\mathfrak{P}_O$ dei vettori del piano aventi origine in O, munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari.

   Fissata una prima retta per O con un punto privilegiato $E_1$ diverso da O, ed una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto privilegiato $E_2$ diverso da O, c'e' un modo naturale di associare a ciascun punto del piano una coppia ordinata di numeri reali, in modo che ai punti O, $E_1$, e $E_2$ corrispondano rispettivamente le coppie $(0,0)$, $(1,0)$, e $(0,1)$. Ciascun coppia di numeri reali $(u_1,u_2)$ si ottiene in corrispondenza di uno ed un solo punto del piano, e $(u_1,u_2)$ vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

   Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano ed $\mathbb{R}^2$. Identificando ciascun vettore con origine in O col suo punto finale, si ha pure una corrispondenza biunivoca fra il piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$ ed $\mathbb{R}^2$.

   Indicati con $e_1$ ed $e_2$ i vettori con origine O e termini rispettivamente $E_1$, e $E_2$, si ha che un vettore $u$ ha coordinate $(u_1,u_2)$ se e solo se

   $$u = u_1e_1 + e_2u_2.$$

   L'addizione di vettori in $\mathfrak{P}_O$ viene rappresentata dall'addizione in $\mathbb{R}^2$, e la moltiplicazione per scalari in $\mathfrak{P}_O$ viene rappresentata dalla moltiplicazione per scalari in $\mathbb{R}^2$. Precisamente, se ai vettori $u,v$ in $\mathfrak{P}_O$ corrispondono le due coppie

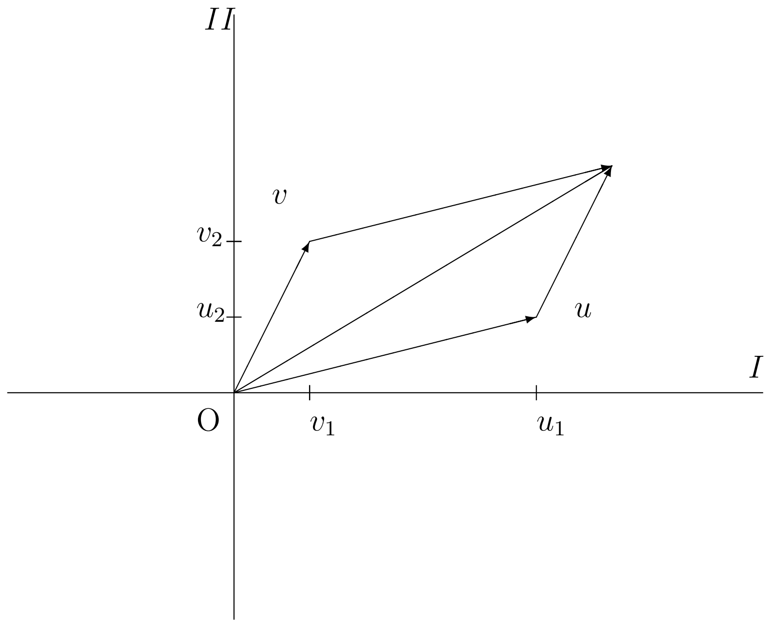
   $$(u_1,u_2), \qquad (v_1,v_2)$$

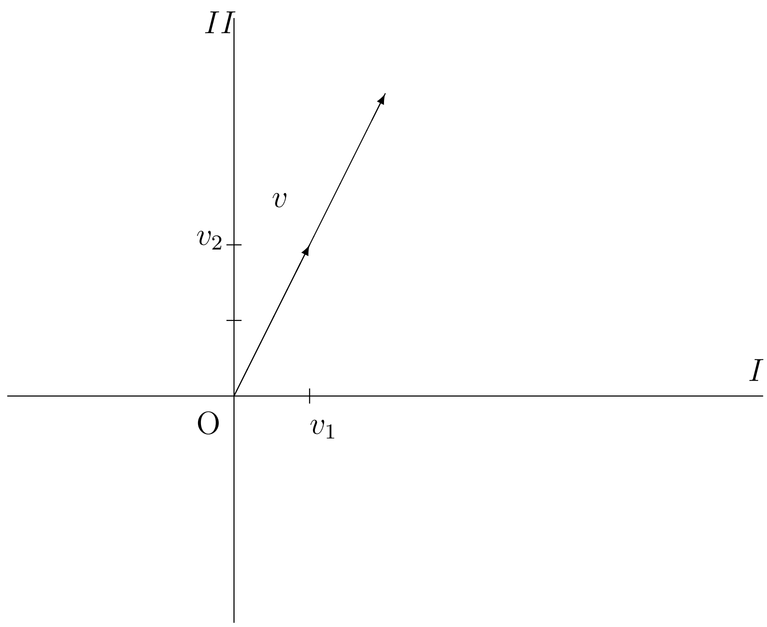
   in $\mathbb{R}^2$, allora al vettore $u+v$ corrisponde la coppia

   $$(u_1+v_1,u_2+v_2) = (u_1,u_2) + (v_1,v_2),$$

   e per ogni scalare $r$ al vettore $rv$ corrisponde la coppia

   $$(rv_1,rv_2) = r(v_1,v_2).$$




D'ora in poi identificheremo ciascun vettore in $\mathfrak{P}_O$ con la coppia ordinata delle sue coordinate in $\mathbb{R}^2$ :

$$u = \left[ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right].$$

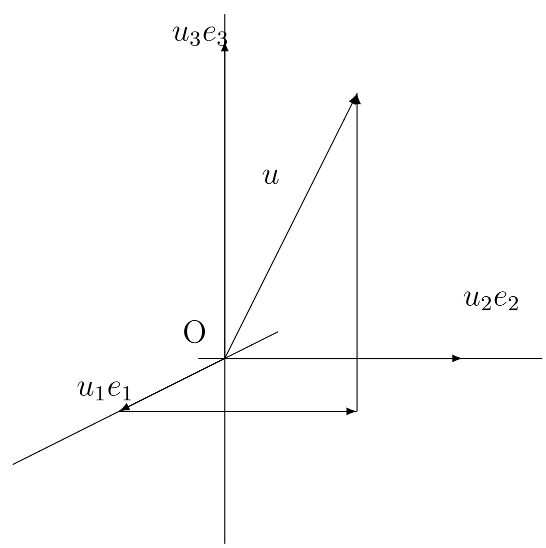
2. **Identificazione fra $\mathfrak{S}_O$ e $\mathbb{R}^3$**

   Fissato nello spazio un punto O, consideriamo lo spazio vettoriale geometrico con origine in O, cioe' l'insieme $\mathfrak{S}_O$ dei vettori dello spazio aventi origine in O, munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari.

   Fissati nello spazio una prima retta per O con un punto $E_1$ diverso da O, una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto $E_2$ diverso da O, ed una terza retta per O, ortogonale alle prime due, con un punto $E_3$ diverso da O, c'e' un modo naturale di associare a ciascun punto dello spazio una terna ordinata di numeri reali in modo che ai punti O, $E_1$, $E_2$ e $E_3$ corrispondano rispettivamente le terne $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

   Ciascun terna $(u_1, u_2, u_3)$ di numeri reali si ottiene in corrispondenza di uno ed un solo punto dello spazio, e $(u_1, u_2, u_3)$ vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

   Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio ed $\mathbb{R}^3$. Identificando ciascun vettore con origine in O col suo punto finale, si ha pure una corrispondenza biunivoca fra lo spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$ ed $\mathbb{R}^2$.




   Indicati con $e_1, e_2, e_3$ i vettori con origine O e termini rispettivamente

$E_1, E_2, E_3$ si ha che un vettore $u$ ha coordinate $(u_1, u_2, u_3)$ se e solo se

$$u = u_1 e_1 + e_2 u_2 + u_3 e_3.$$

L'addizione di vettori in $\mathfrak{S}_O$ viene rappresentata dall'addizione in $\mathbb{R}^3$, e la moltiplicazione per scalari in $\mathfrak{S}_O$ viene rappresentata dalla moltiplicazione per scalari in $\mathbb{R}^3$. Precisamente, se ai vettori $u, v$, corrispondono le due terne

$$(u_i)_1^3, \qquad (v_i)_1^3,$$

allora al vettore $u + v$ corrisponde la terna

$$(u_i + v_i)_1^3 = (u_i)_1^3 + (v_i)_1^3,$$

e per ogni scalare $r$ al vettore $ru$ corrisponde la terna

$$(ru_i + v_i)_1^3 = r(u_i + v_i)_1^3.$$

D'ora in poi identificheremo ciascun vettore in $\mathfrak{S}_O$ con la terna ordinata delle sue coordinate:

$$u = [u_i]_1^3.$$

3. **Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.**

Sia $n$ un intero positivo fissato. Lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali, che rappresenteremo sempre come vettori colonna

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

munito dell'operazione di addizione di due $n-$ple, definita da

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

e dell'operazione di moltiplicazione di una $n-$pla per un numero reale, definita da

$$r \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ru_1 \\ \vdots \\ ru_n \end{bmatrix}.$$

Penseremo ciascuna $n-$pla come un'unica entita', e le indicheremo con lettere minuscole $a, b, \dots, u, v, \dots$.

La n-pla $0_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ viene detta *vettore nullo* di $\mathbb{R}^n$.

Al posto di $n-$pla useremo spesso il termine *vettore*, e al posto di numero reale useremo il termine *scalare*.

Data una sequenza di un certo numero di vettori $v_1, \dots, v_m$ in $\mathbb{R}^n$ ed una sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, \dots, r_m$ in $\mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m$$

in $\mathbb{R}^n$, detto *combinazione lineare* dei vettori $v_1, \dots, v_m$ con coefficienti $r_1, \dots, r_m$.

4. Dati in $\mathbb{R}^n$ $m+1$ vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \ \dots, \ v_m = \begin{bmatrix} v_{1m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix}; \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

ci chiediamo se $w$ e' o meno combinazione lineare degli $m$ vettori $v_1, \dots, v_m$. Cio' significa chiedersi se l'equazione nelle incognite scalari $x_1, \dots, x_m$

$$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = w$$

ha soluzione o meno. Sostituendo a $v_1, \dots, v_m, w$ i loro valori, si ha

$$x_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} v_{1m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

cioe' il sistema lineare

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + \cdots + v_{1m}x_m = w_1 \\ \vdots \\ v_{n1}x_1 + \cdots + v_{nm}x_m = w_n \end{cases}.$$

Dunque si ha che

> in $\mathbb{R}^n$ la ricerca delle combinazione lineari di m vettori che risultano in un dato vettore si traduce sempre nella ricerca delle soluzioni di un sistema lineare di n equazioni in m incognite.

5. **Dipendenza/Indipendenza lineare.**

   **Def.** *Siano dati m vettori* $v_1, \ldots, v_m$ *in* $\mathbb{R}^n$, *con* $m > 1$.

   - *se c'e' un* $v_i$ *che e' combinazione lineare degli altri, diciamo che* $v_1, \ldots, v_m$ *sono linearmente dipendenti;*
   - *se nessun* $v_i$ *e' combinazione lineare degli altri, diciamo che* $v_1, \ldots, v_m$ *sono linearmente indipendenti.*

   *Diciamo che* $v$ *in* $\mathbb{R}^n$ *e' linearmente dipendente o indipendente secondoche rispettivamente* $v = 0_n$ *o* $v \neq 0_n$.

   Esplicitamente, i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti se c'e' un vettore $v_i$ e ci sono $m-1$ scalari $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$v_i = r_1 v_1 + \cdots + r_{i-1}v_{i-1} + r_{i+1}v_{i+1} + \cdots + r_m v_m.$$

   La locuzione "linearmente dipendenti" e' suggerita dal fatto che il vettore $v_i$ si puo' scrivere "in funzione" degli altri vettori, "dipende" da essi.

   **Esempi**

- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$. Si ha
$$v_1 = \frac{1}{2} v_2.$$
Dunque $v_1, v_2$ sono linearmente dipendenti.
- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si ha
$$v_2 = 0 v_1.$$
Dunque $v_1, v_2$ sono linearmente dipendenti.
- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$. Non esiste alcun scalare $r$ tale che
$$v_1 = r v_2,$$
e non esiste alcun scalare $s$ tale che
$$v_2 = s v_1.$$
Dunque $v_1, v_2$ sono linearmente indipendenti.
- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Si ha
$$v_2 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3.$$
Dunque $v_1, v_2, v_3$ sono linearmente dipendenti.
- Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Non esistono scalari $r, s$ tali che
$$e_1 = r e_2 + s e_3;$$

non esistono scalari $r, s$ tali che

$$e_2 = re_1 + se_3;$$

e non esistono scalari $r, s$ tali che

$$e_3 = re_1 + se_2.$$

Dunque $e_1, e_2, e_3$ sono linearmente indipendenti.

**Altri esempi**

- Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Se uno di essi, ad esempio $v_2$, e' uguale al vettore nullo 0, allora si ha

  $v_2 = 0v_1,$

  cosi' $v_1, v_2$ sono linearmente dipendenti.

- Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, entrambi diversi dal vettore nullo 0. Se le componenti di $v_1$ sono proporzionali alle componenti di $v_2$, allora $v_1, v_2$ sono linearmente dipendenti. Se le componenti di $v_1$ non sono proporzionali alle componenti di $v_2$, alloora $v_1, v_2$ sono linearmente indipendenti.

- Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$, $\dots$ $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, vettori in $\mathbb{R}^n$.

  Sia $i$ un indice compreso fra 1 ed $n$. Ci chiediamo se ci sono $n-1$ scalari $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ tali che

  $$e_i = r_1e_1 + \dots + r_{i-1}e_{i-1} + r_{i+1}e_{i+1} + \dots + r_ne_n.$$

  Prendendo ad entrambe i membri la $i-$ma componente si ha l'uguaglianza

  $$1 = r_10 + \dots + r_{i-1}0 + r_{i+1}0 + \dots + r_n0.$$

  che e' impossibile.

  Dunque nessun vettore $e_i$ e' combinazione lineare degli altri, e i vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$ sono linearmente indipendenti; si dice che questi vettori formano la *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

6. Decidere se un insieme di vettori e' linearmente dipendente o indipendente usando la definizione puo' essere piuttosto laborioso. Un utile criterio e' dato dal

**Th.** *Siano* $v_1, \ldots, v_m$ *vettori di* $\mathbb{R}^n$.

*(a) Se esistono* $r_1, \ldots, r_m$ *in* $\mathbb{R}$, *non tutti nulli, tali che*

$$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0_n,$$

*allora* $v_1, \ldots, v_m$ *sono linearmente dipendenti;*

*(b) Se l'equazione*

$$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0_n,$$

*e' soddisfatta solo per* $x_1 = \ldots = x_m = 0$, *allora* $v_1, \ldots, v_m$ *sono linearmente indipendenti.*

**Dim.** Dimostriamo solo la parte (a). Supponiamo che l'uguaglianza

$$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0_n$$

valga per certi scalari non tutti nulli $r_1, \ldots, r_m$; supponiamo per semplicita' che $r_1 \neq 0$. Possiamo ricavare $v_1$ come combinazione lineare

$$v_1 = -\frac{r_2}{r_1} v_2 - \cdots - \frac{r_m}{r_1} v_m,$$

di $v_2, \ldots, v_m$. Dunque $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti. $\square$

**Esempi**

- Vediamo come si usa il criterio sopra esposto per deciere se i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti. Consideriamo l'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$

nelle incognite scalari $x_1, x_2, x_3$. Questa equazione fra vettori di $\mathbb{R}^3$ e' equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases},$$

che ha soluzioni

$$\begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \\ x_3 & = & qualsiasi \end{cases},$$

e in particolare ha la soluzione $(1, -2, 1)$. Dunque si ha

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = 0;$$

Per il criterio sopra esposto, possiamo concludere che i vettori $v_1, v_2, v_3$ sono linearmente dipendenti.

- Vediamo come si usa il criterio sopra esposto per deciere se i vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti o indipendenti. Consideriamo l'equazione

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = 0,$$

nelle incognite scalari $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Questa equazione fra vettori di $\mathbb{R}^n$ e' equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}.$$

Dunque i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti.

- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo $m$ vettori $v_1, \ldots, v_m$, con $m > n$. L'equazione

  $$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0_n$$

  e' equivalente a un sistema lineare omogeneo di $n$ equazioni in $m > n$ incognite. Per uno dei teoremi sui sistemi lineari (cfr. Lez. III), questo sistema e' indeterminato, e cosi' ha qualche soluzione $(r_1, \ldots, r_m)$ diversa dalla soluzione banale $(0, \ldots, 0)$. Dunque si ha

  $$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0_n$$

  con qualche $r_i \neq 0$. Per il criterio sopra esposto, $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti.

Dagli ultimi due esempi segue che

> *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti e' $n$.*