Matematica II, 13.12.11

1. **Sottospazi di $\mathbb{R}^n$**

   Nello spazio vettoriale $\mathfrak{S}_O$ consideriamo un piano π per O, e i vettori di $\mathfrak{S}_O$ che stanno su π. Osserviamo che: se due vettori stanno su π, anche il parallelogramma da essi individuato sta su π, e dunque anche la somma dei due vettori sta su π; se un vettore sta su π, anche la retta da esso individuata sta su π, e dunque anche i multipli scalari del vettore stanno su π. Questo fatto suggerisce la seguente

   Def. Un sottinsieme V di $\mathbb{R}^n$ si dice *sottospazio* di $\mathbb{R}^n$ se soddisfa le seguenti condizioni:

   - per ogni $u, v \in V$, si ha $u + v \in V$;
   - per ogni $u \in V$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$, si ha $ru \in V$;
   - V non e' vuoto, $V \neq \emptyset$.

   $\mathbb{R}^n$ e l'insieme $\{0_n\}$ ridotto al solo vettore nullo sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$, il piu' grande e il piu' piccolo fra i sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

   Esempi di sottospazi di $\mathfrak{S}_O$ sono dati da

   - l'insieme che contiene solo l'origine O;
   - ciascuna retta per O;
   - ciascun piano per O;
   - l'intero spazio.

   Si prova che non ci sono sottospazi di $\mathfrak{S}_O$ al di fuori di questi.

   Un esempio di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e' dato dall'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno le prime 3 componenti arbitrarie e l'ultima componente nulla. Questo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ si puo' identificare con $\mathbb{R}^3$.

   Piu' in generale, l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che hanno le prime m componenti arbitrarie e le ultime $n - m$ componenti nulle e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, che si puo' identificare con $\mathbb{R}^m$.

2. **Spazi generati**

   Nello spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$, si ha che

- l'insieme dei multipli scalari di un vettore non nullo $v \neq 0_3$

$$\{rv;\ r \in \mathbb{R}\}$$

e' una retta per O;

- l'insieme delle combinazioni lineari di due vettori v_1, v_2 non allineati

$$\{r_1 v_1 + r_2 v_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$$

e' un piano per O.

Questi fatti suggeriscono la seguente

Def. Siano $v_1, \ldots, v_m$ vettori in $\mathbb{R}^n$. L'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_m$ viene detto *spazio generato* da $v_1, \ldots, v_m$, e viene indicato con $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. In simboli:

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i v_i;\ r_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti:

- se $u = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^{m} s_i v_i$ sono combinazioni lineari dei vettori v_i, allora anche

$$u + v = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i + \sum_{i=1}^{m} s_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (r_i + s_i) v_i$$

e' una combinazione lineare dei vettori v_i;

- se $u = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i$ e' una combinazione lineare dei vettori v_i, ed $r \in \mathbb{R}$, allora anche

$$ru = r \sum_{i=1}^{m} r_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (r r_i) v_i$$

e' una combinazione lineare dei vettori v_i;

- l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori v_i e' ovviamente non vuoto.

Lo spazio $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ contiene ciascuno dei vettori v_i, in quanto

$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \cdots 0v_m$

$v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \cdots 0v_m$

$\vdots$

In realta' $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ e' il piu' piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che contiene i vettori $v_1, \ldots, v_m$.

Es. L'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che hanno le prime m componenti arbitrarie e le ultime $n-m$ componenti nulle e' il sottospazio $\langle e_1, \ldots, e_m \rangle$ di $\mathbb{R}^n$ generato dai primi m vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Oss. Se il vettore v_m e' combinazione lineare

$$v_m = r_{m1}v_1 + \cdots + r_{m,m-1}v_{m-1},$$

dei vettori $v_1, \ldots, v_{m-1}$, allora

$$\langle v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{m-1} \rangle.$$

Infatti, ogni combinazione lineare

$$r_1v_1 + \cdots + r_{m-1}v_{m-1} + r_mv_m$$

dei vettori $v_1, \ldots, v_m$ si puo' riscrivere come combinazione lineare

$$\begin{aligned} r_1v_1 + \cdots + r_{m-1}v_{m-1} + r_m\left(r_{m1}v_1 + \cdots + r_{m,m-1}v_{m-1}\right) = \\ \left(r_1 + r_mr_{m1}\right)v_1 + \cdots + \left(r_{m-1} + r_mr_{m,m-1}\right)v_{m-1} \end{aligned}$$

dei vettori $v_1, \ldots, v_{m-1}$.

In modo simile si prova che, se in un insieme di vettori c'e' un vettore che e' combinazione lineare degli altri, allora tale vettore puo' essere cancellato dall'insieme senza alterare lo spazio generato.

3. **Soluzioni di un sistema lineare omogeneo**

Nello spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$, che si puo' identificare con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si ha che

- l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

  in breve

$$a'x = 0,$$

  dove a e' un vettore non nullo, e' un piano per O;

- l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di due equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R},$$

  in breve

$$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ a_2'x = 0 \end{cases},$$

  dove nessuno dei due vettori a_1 e a_2 e' multiplo scalare dell'altro, e' una retta per O.

Piu' in generale, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si ha che

- l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ a_i'x = 0, \ \forall i = 1, \ldots, m \}, \qquad a_i \in \mathbb{R}^n,$$

  e' un sottospazio.

Cio' puo' essere provato come segue. Se $s, t \in \mathbb{R}^n$ sono soluzioni del sistema, cioe' se

$$\begin{aligned} a_i's = 0 \qquad & i = 1, 2, \ldots, m \\ a_i't = 0 \qquad & i = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned}$$

allora

$$a_i'(s + t) = a_i's + a_i't = 0 + 0 = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

cioe' $s + t$ e' ancora una soluzione del sistema. In modo analogo si prova che se $s \in \mathbb{R}^n$ e' una soluzione del sistema, e $r \in \mathbb{R}$, allora anche rs e' una soluzione del sistema.

L'insieme delle soluzioni del sistema e' diverso dal vuoto, in quanto contiene il vettore nullo 0_n.

Es. L'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che hanno le prime m componenti arbitrarie e le ultime $n-m$ componenti nulle e' il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $e'_{m+1}x = 0, \ldots,$ $e'_n x = 0$.

Oss. Se il vettore a_m e' combinazione lineare

$$a_m = r_1 a_1 + \cdots + r_{m-1} a_{m-1},$$

dei vettori $a_1, \ldots, a_{m-1}$, allora l'insieme delle soluzioni delle equazioni

$$a'_1 x = 0, \ \ldots, \ a'_{m-1} x = 0, \ a'_m x = 0$$

coincide con l'insieme delle soluzioni delle equazioni

$$a'_1 x = 0, \ \ldots, \ a'_{m-1} x = 0.$$

Infatti, se $s \in \mathbb{R}^n$ e' una soluzione delle prime $m-1$ equazioni, cioe'

$$a'_1 s = 0, \ \ldots, \ a'_{m-1} s = 0,$$

allora si ha

$$a'_m s = (r_1 a_1 + \cdots + r_{m-1} a_{m-1})' s = \\ r_1(a'_1 s) + \cdots + r_{m-1}(a'_{m-1} s) = r_1 0 + \cdots + r_{m-1} 0 = 0,$$

cioe' s e' soluzione anche dell'ultima equazione.

In modo simile si prova che, se in un sistema di equazioni lineari ce n'e' una che e' combinazione lineare delle altre, allora tale equazione puo' essere cancellata dal sistema senza alterare l'insieme delle soluzioni.

4. Dimensione di un sottospazio

Abbiamo visto che nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti e' n. Questo fatto suggerisce la seguente

Def. Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Il massimo numero di vettori di V linearmente indipendenti viene detto *dimensione* di V, e viene indicato con $\dim(V)$.

Si ha che $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\{0\}) = 0$, e per ogni sottospazio V di $\mathbb{R}^n$

$$0 \leq \dim(V) \leq n.$$

Un sottospazio $m-$dimensionale di $\mathbb{R}^n$ si puo' identificare con $\mathbb{R}^m$, nel senso del seguente

Th. Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, con $\dim(V) = m$, e siano $v_1, \ldots, v_m \in V$ linearmente indipendenti. Allora ogni vettore $v \in V$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

$$v = r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m, \qquad r_i \in \mathbb{R},$$

dei vettori $v_1, \ldots, v_m$. In particolare, si ha $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$; inoltre, la funzione $v \mapsto (r_1, \ldots, r_m)$ e' una biiezione $V \to \mathbb{R}^m$, che si comporta bene rispetto alle operazioni di somma di vettori e moltiplicazione di vettori per scalari.

Dim. Proviamo solo che ogni vettore $v \in V$ si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_m$.

Per ipotesi, i vettori $v_1, \ldots, v_m$ di V sono linearmente indipendenti e m e' il massimo numero di vettori di V linearmente indipendenti. Dunque i vettori $v_1, \ldots, v_m, v$ sono linearmente dipendenti, e ci sono $m+1$ scalari $r_1, \ldots, r_m, r$ non tutti nulli tali che

$$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m + r v = 0_n.$$

Osserviamo che se lo scalre r fosse nullo, ci sarebbero m scalari $r_1, \ldots, r_m$ non tutti nulli tali che $r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0_n$, e i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Dunque $r \neq 0$, e possimo ricavare v come combinazione lineare

$$v = -\frac{r_1}{r} v_1 - \cdots - \frac{r_m}{r} v_m$$

dei vettori $v_1, \ldots, v_m$.

5. Per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come lo spazio generato da un insieme di vettori, vale il seguente teorema, che non dimostriamo.

   Th. Sia $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$.

- $\dim(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) \leq m$;
- $\dim(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) = m$ se e solo se $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

6. Per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, vale il seguente teorema, che non dimostriamo.

   Th. Sia N il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite $a_1'x = 0, \ldots\ a_m'x = 0$.

   - $\dim(N) \geq n - m$;
   - $\dim(N) = n - m$ se e solo se $a_1, \ldots, a_m$ sono linearmente indipendenti.