Matematica II, 14.12.11

1. **Ortogonalita' nel piano.**

   Fissato nel piano un punto O, consideriamo il piano vettoriale $\mathfrak{P}_O$. Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli. Per convenzione, stabiliamo che il vettore nullo sia ortogonale ad ogni altro vettore. Dati due vettori $v, w \in \mathfrak{P}_O$, scriveremo

   $$v \perp w$$

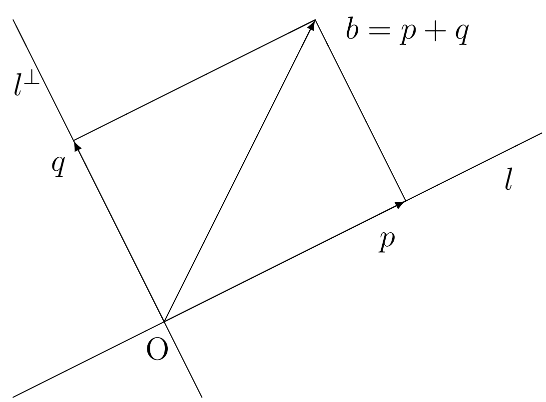
   per indicare che v e w sono ortogonali.

   Osserviamo che i vettori ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono una retta per O.

   Data una retta l per O, sia $l^{\perp}$ la retta per O ortogonale ad l. Ogni vettore $b \in \mathfrak{P}_O$ si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma di un vettore p sulla retta l ed un vettore q sulla retta $l^{\perp}$

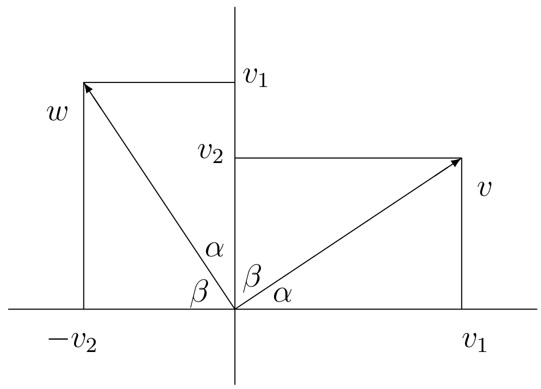
   $$\begin{aligned} &b = p + q \\ &p \in l \\ &q \in l^{\perp} \end{aligned}$$

   Diciamo che p e' la *proiezione ortogonale* di b su l, e che q e' la *proiezione ortogonale* di b su $l^{\perp}$.

2. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo il piano vettoriale $\mathfrak{P}_O$ con $\mathbb{R}^2$.

Dato un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, ci sono un paio di scelte psicologicamente naturali per un vettore ortogonale a v, una delle quali e' $w = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$.



La scelta e' corretta. Informalmente, si puo' osservare che si vengono a formare quattro triangoli rettangoli uguali, l'angolo formato dai vettori v e w e' $\alpha+\beta$, ma $\alpha+\beta$ e' anche l'angolo formato dai due assi coordinati, che e' retto.

I vettori ortogonali al vettore v sono tutti e soli quelli del tipo

$$wr = \begin{bmatrix} -v_2 r \\ v_1 r \end{bmatrix},$$

dove r e' uno scalare qualsiasi.

Osserviamo che la somma dei prodotti delle componenti del vettore v per le corrispondenti componenti del vettore wr e' sempre nulla:

$$v_1 \cdot (-v_2 r) + v_2 \cdot (v_1 r) = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$a \perp b \qquad \textit{se e solo se} \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Ora,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a'b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque che

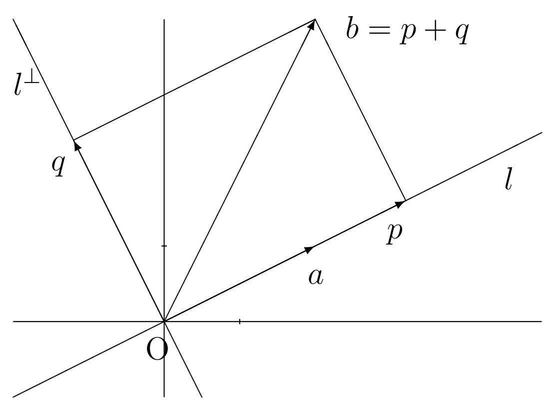
$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a'b = 0.$$

3. Vediamo ora come la costruzione della proiezione ortogonale di un vettore $b \in \mathfrak{P}_O$ su una retta l per O si possa effettuare algebricamente. Possiamo descrivere la retta l come l'insieme dei vettori multipli scalari di un vettore non nullo a :

$$l = \{ar;\ r \in \mathbb{R}\},$$

e la retta $l^\perp$ come l'insieme dei vettori ortogonali al vettore a :

$$l^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ a'x = 0\}.$$



Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= ar, \qquad r \in \mathbb{R} \\ a'q &= 0, \end{aligned}$$

dove r e' uno scalare incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per a' entrambe i membri si ha

$$a'b = a'(ar + q),$$

cioe'

$$a'b = a'a\ r + a'q,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$a'b = a'a\ r,$$

o

$$a'a\ r = a'b.$$

Ora, questa e' un'equazione lineare nell'incognita r, e il coefficiente $a'a$ e' diverso da 0 in quanto a e' diverso dal vettore nullo. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \frac{a'b}{a'a},$$

dalla quale si ottiene

$$p = ar = a\frac{a'b}{a'a}.$$

Lo scalare $(a'b)\,/\,(a'a)$ viene detto *coefficiente di Fourier* del vettore b rispetto al vettore a.

Nel nostro caso, si ha

$$r = \tfrac{a'b}{a'a} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \tfrac{8}{5},$$

da cui

$$p = ar = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\tfrac{8}{5} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

$$q = b - p = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 2.4 \end{bmatrix}.$$

4. **Ortogonalita' nello spazio**

Fissato nello spazio un punto O, consideriamo lo spazio vettoriale $\mathfrak{S}_O$. Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli. Per convenzione, stabiliamo che il vettore nullo sia ortogonale ad ogni altro vettore. Dati due vettori $v, w \in \mathfrak{S}_O$, scriveremo

$$v \perp w$$

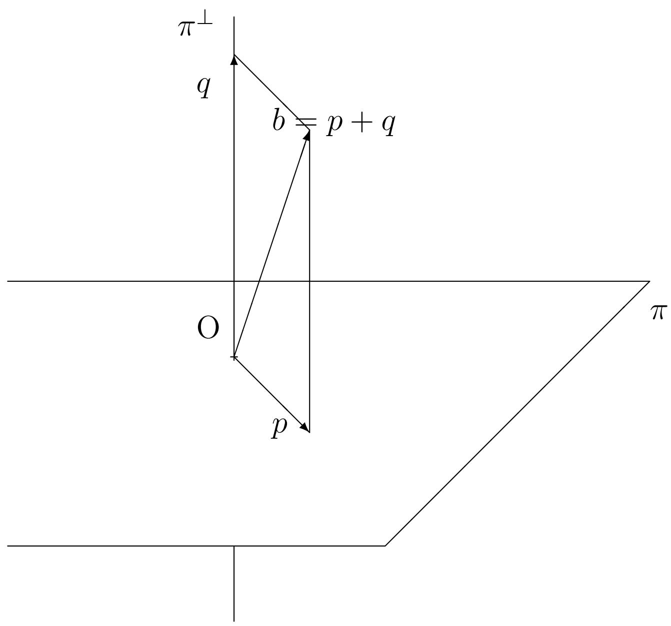
per indicare che v e w sono ortogonali.

Osserviamo che i vettori ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono un piano, e che i vettori ortogonali a due dati vettori v, w non allineati descrivono una retta.

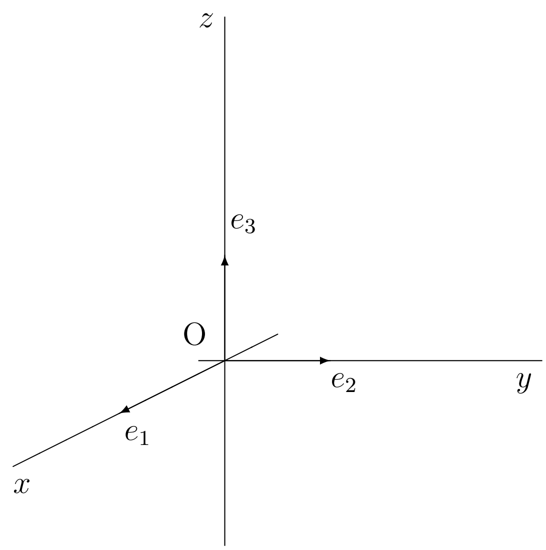
Dato un piano π per O, sia $\pi^\perp$ la retta per O ortogonale a π. Ogni vettore $b \in \mathfrak{S}_O$ si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma di un vettore p sul piano π ed un vettore q sulla retta $\pi^\perp$

$$\begin{aligned} &b = p + q \\ &p \in \pi \\ &q \in \pi^\perp \end{aligned}$$

Diciamo che p e' la proiezione ortogonale di b sul piano π, e che q e' la proiezione ortogonale di b sulla retta $\pi^\perp$.



5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo lo spazio vettoriale $\mathfrak{S}_O$ con $\mathbb{R}^3$.



Fatto

Si puo' provare che due vettori $a = [a_i]_{i=1}^3$ e $b = [b_i]_{i=1}^3$ sono ortogonali se e solo se la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' nulla:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Ora,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a'b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque ancora che

$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a'b = 0.$$

Noi sappiamo che, per costruzione, i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono a due a due ortogonali. Cio' si ritrova anche algebricamente, in quanto

$e_1' e_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$

$e_1'e_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$

$e_2'e_3 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$

Possiamo anche ritrovare che i vettori che stanno sul piano xy sono ortogonali ai vettori che stanno sull'asse z. Infatti, i primi sono del tipo $a = [a_i]_{i=1}^3$ con $a_3 = 0$, i secondi sono del tipo $b = [b_i]_{i=1}^3$ con $b_1 = b_2 = 0$, e si ha

$a'b = a_1 0 + a_2 0 + 0 b_3 = 0.$

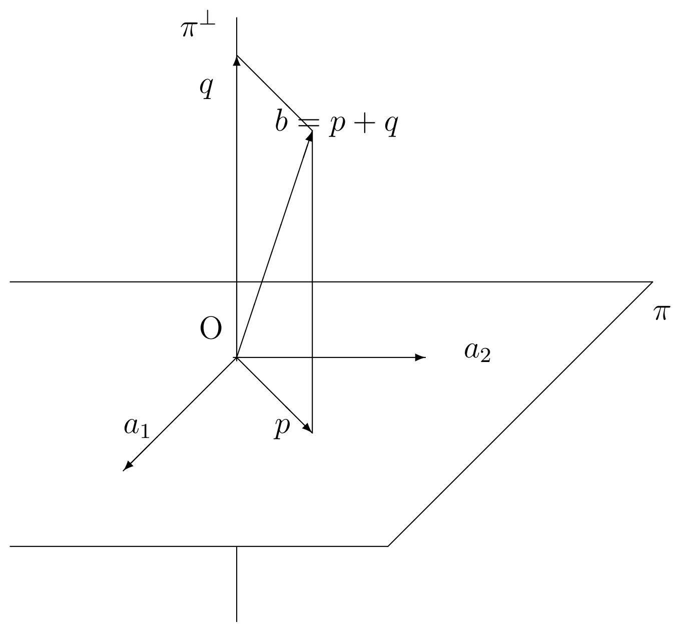
6. Vediamo ora come la costruzione della proiezione ortogonale di un vettore $b \in \mathfrak{S}_O$ su un piano π per O si possa effettuare algebricamente.

   Possiamo descrivere il piano π come l'insieme dei vettori combinazioni lineari di due vettori non allineati a_1, a_2 :

$$\pi = \{a_1 r_1 + a_2 r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\},$$

   e la retta $\pi^\perp$ come l'insieme dei vettori ortogonali ai vettori a_1, a_2 :

$$\pi^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ a_1'x = 0,\ a_2'x = 0\}.$$



Prima di procedere, conviene rappresentare il piano π e la retta $\pi^{\perp}$ in un modo piu' sintetico. Osserviamo che le combinazioni lineari $a_1 r_1 + a_2 r_2$ dei vettori a_1 e a_2 si possono scrivere nella forma

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 = \left[\begin{array}{c|c} & \\ a_1 & a_2 \\ & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array}\right],$$

e che le condizioni di ortogonalita' $a_1' x = 0,\ a_2' x = 0$ ai vettori a_1, a_2 si possono riscrivere nella forma

$$\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array}\right] x = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

Percio', posto $A = \left[\begin{array}{c|c} & \\ a_1 & a_2 \\ & \end{array}\right]$, ed osservato che $\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array}\right] = A'$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \pi &= \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^2\}, \\ \pi^{\perp} &= \{x \in \mathbb{R}^3 :\ A'x = 0_2\}. \end{aligned}$$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= Ar, \qquad r \in \mathbb{R}^2 \\ A'q &= 0, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^2$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = Ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per A' entrambe i membri si ha

$$A'b = A'(Ar + q),$$

cioe'

$$A'b = A'A\ r + A'q,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$A'b = A'A\ r,$$

o

$$A'A\ r = A'b.$$

Ora, si puo' provare che la matrice quadrata $A'A$ risulta essere invertibile, in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = (A'A)^{-1} A'b,$$

dalla quale si ottiene

$$p = Ar = A\,(A'A)^{-1} A'b.$$

Il vettore $(A'A)^{-1} A'b$ in $\mathbb{R}^2$ viene detto *coefficiente di Fourier* del vettore b rispetto alla matrice A.

Es. Per

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si ha

$$r = (A'A)^{-1} A'b = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ 7/9 \end{bmatrix}$$

da cui

$$p = Ar = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 \\ 7/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ 14/9 \\ 8/9 \end{bmatrix}.$$

N.B.: qui si e' usata, e nel seguito si usera', la notazione A' al posto della notazione A^T per intendere la trasposta di una matrice A.