Matematica II, Esercizi III, 15.12.11

1. Per ciascuna delle seguenti famiglie di vettori di $\mathbb{R}^3$ si dica se e' linermente dipendente o linearmente indipendente.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ed il piano π da essi generato. Per ciascuno dei seguenti vettori

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix},$$

si dica se appartiene o meno a π.

3. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

   determinare la dimensione dei seguenti spazi

$$\langle a, b \rangle, \quad \langle a, b, c \rangle, \quad \langle a, b, d \rangle.$$

4. In $\mathbb{R}^2$ sono dati i vettori

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si determinino il coefficiente di Fourier di b rispetto ad a e la proiezione ortogonale di b sulla retta generata da a.

5. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si determinino il coefficiente di Fourier di b rispetto alla matrice $\left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right]$, e la proiezione ortogonale p di b sul piano generato da a_1 e a_2; si scriva p come combinazione lineare di a_1 e a_2.

6. Si determini, usando la formula generale, la proiezione ortogonale del generico vettore di $\mathbb{R}^3$ sul piano individuato dai primi due assi coordinati.