Matematica II, 16.12.11

1. **Prodotto interno**

   Dati due vettori $a = [a_i]_1^n$ e $b = [b_i]_1^n$ di $\mathbb{R}^n$, possiamo considerare il numero reale dato dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti dei due vettori

$$\sum_1^n a_i b_i = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a'b;$$

   questo numero reale viene detto *prodotto interno* di a per b.

   Dalle proprieta' delle operazioni nell'algebra delle matrici discendono le seguenti proprieta' del prodotto interno:

$$\begin{aligned} (a+c)'b &= a'b + c'b \\ a'(b+d) &= a'b + a'd \\ (ra)'b &= a'(rb) = r(a'b), \end{aligned}$$

   per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$.

   Osserviamo che scambiando i fattori il prodotto interno non cambia:

$$b'a = \sum_1^n b_i a_i = \sum_1^n a_i b_i = a'b;$$

   percio' potremo dire "prodotto interno fra a e b," ed usare indifferentemente la forma $a'b$ o la forma $b'a$.

   Osserviamo che il prodotto interno di un vettore con se' stesso e' la somma dei quadrati delle sue componenti:

$$a'a = \sum_1^n a_i^2,$$

   dunque esso e' sempre maggiore-uguale a zero, ed e' zero se e solo se tutte le compnenti sono nulle, cioe' il vettore e' il vettore nullo:

$$\begin{aligned} a'a &\geq 0, & & \forall a \in \mathbb{R}^n \\ a'a &= 0, & \Leftrightarrow & \quad a = 0_n \end{aligned}$$

2. **Ortogonalita'**

Se il prodotto interno fra due vettori a e b di $\mathbb{R}^n$ e' zero, diciamo che il vettore a e' *ortogonale* al vettore b, e scriviamo $a \perp b$; in simboli, poniamo

$$a \perp b \qquad \Leftrightarrow \qquad a'b = 0.$$

Dalle proprieta' del prodotto interno derivano le seguenti proprieta' della relazione di ortogonalita'

- la relazione di ortogonalita' e' simmetrica:

$$a \perp b \qquad \Leftrightarrow \qquad b \perp a;$$

- il vettore nullo e' l'unico vettore di $\mathbb{R}^n$ ortogonale a se' stesso:

$$a \perp a \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 0_n;$$

- se un vettore a e' ortogonale a ciascuno dei vettori $b, \dots, c$, allora a e' ortogonale anche ad ogni combinazione lineare di $b, \dots, c$:

$$a \perp b, \, \dots, \, a \perp c \qquad \Rightarrow \qquad a \perp (rb + \cdots + sc), \qquad \forall r, \dots, s \in \mathbb{R}.$$

  Infatti da $a'b = \ldots = a'c = 0$ segue

$$a'(rb + \cdots + sc) = r(a'b) + \cdots + s(a'c) = r0 + \cdots + s0 = 0.$$

Osserviamo che i vettori $e_1, \dots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono a due a due ortogonali:

$$e_i \perp e_j \qquad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Infatti per ogni vettore e_i ed ogni vettore $b = [b_i]_1^n$ si ha

$$e_i'b = 0b_1 + \cdots + 0b_{i-1} + 1b_i + 0b_{i+1} + \cdots + 0b_n = b_i;$$

e cosi'

$$e_i'e_j = 0, \qquad \forall i \neq j.$$

3. **Complemento ortogonale di un sottospazio**

   Sia S un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a ciascun vettore di S e' detto *complemento ortogonale* di S, e viene indicato con $S^\perp$; in simboli:

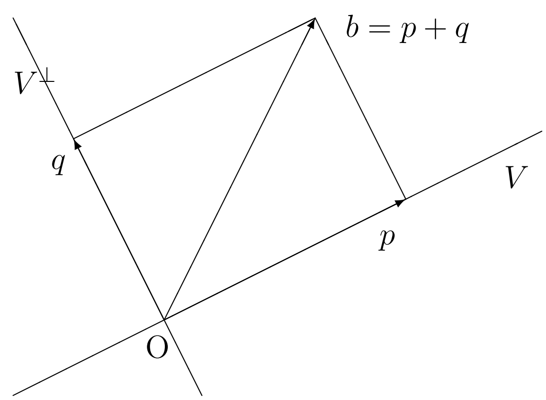
   $$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a'x = 0, \ \forall a \in S\}.$$

   Dalle proprieta' dell'ortogonalita' segue che $S^\perp$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

   Th. *Sia V un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, e sia $V^\perp$ il suo complemento ortogonale. Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma di un vettore $p \in V$ e di un vettore $q \in V^\perp$:*

   $$\begin{aligned} &b = p + q \\ &p \in V \\ &q \in V^\perp \end{aligned}$$

   Il vettore p si dice proiezione ortogonale di b su V, e il vettore q si dice proiezione ortogonale di b su $V^\perp$.

   Non diamo la dimostrazione di questo teorema.

4. Consideriamo un sottospazio V di dimensione m, che possiamo rappresentare come il sottospazio generato da m vettori $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti. Dalle proprieta' dell'ortogonalita' segue che un vettore appartiene al complemento ortogonale $V^\perp$ se e solo se e' ortogonale a ciascuno degli m vettori $a_1, \ldots, a_m$.

Esplicitamente, abbiamo

$$
\begin{aligned}
V &= \{a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m;\ r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & \ldots & a_m \end{array}\right] \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix};\ r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R} \right\},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ a_i' x = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^n :\ \left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline \vdots \\ \hline a_m' \end{array}\right] x = 0_m, \right\}.
\end{aligned}
$$

Indicata con

$$
A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & \ldots & a_m \end{array}\right]
$$

la matrice avente per colonne $a_1, \ldots, a_m$, ed osservato che

$$
\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline \vdots \\ \hline a_m' \end{array}\right] = A',
$$

possiamo scrivere sinteticamente

$$
\begin{aligned}
V &= \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^m\}, \\
V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ A'x = 0_m\}.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che $V^\perp$, essendo l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni linearmente indipendenti, ha dimensione $n - m$. Dunque le dimensioni di V e del suo complemento ortogonale $V^\perp$ sono legate dalla relazione

$$
\dim(V) + \dim(V^\perp) = n.
$$

5. Siano V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$. La proiezione ortogonale p di b su V e la proiezione ortogonale q di b su $V^\perp$ sono univocamente

determinate dalle condizioni

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &\in V \\ q &\in V^{\perp}. \end{aligned}$$

La proiezione ortogonale di un vettore b su un sottospazio V si puo' determinare nel modo seguente.

Se V e' il sottospazio generato dagli m vettori $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti, e $A = \left[\; a_1 \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; a_m \;\right]$ e' la matrice di tipo $n \cdot m$ avente per colonne i vettori a_i, possiamo esprimere queste condizioni nella forma

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= Ar, \qquad r \in \mathbb{R}^m \\ A'q &= 0_m, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^m$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = Ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per A' entrambe i membri si ha

$$A'b = A'(Ar + q),$$

cioe'

$$A'b = A'Ar + A'q,$$

dalla quale, per la terza condizione, si ha

$$A'b = A'Ar,$$

o

$$A'Ar = A'b.$$

Si prova che la matrice $A'A$ quadrata di ordine m e' invertibile, in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = (A'A)^{-1} A'b.$$

Infine, abbiamo che il vettore p proiezione ortogonale del vettore b sullo spazio V generato dalle colonne della matrice A e' dato da

$$p = Ar = A\left(A'A\right)^{-1} A'b.$$

Per ciascuna matrice A di tipo $n \cdot m$ con colonne linearmente indipendenti, e per ciascun vettore $b \in \mathbb{R}^n$, il vettore di $\mathbb{R}^m$ dato dalla divisione a sinistra del prodotto $A'b$ per il prodotto $A'A$ viene detto *coefficiente di Fourier* del vettore b rispetto alla matrice A, e viene indicato con $cf(b, A)$:

$$cf(b, A) = \left(A'A\right)^{-1} A'b.$$

6. **Proiezione ortogonale su sottospazi di dimensione 1**

Consideriamo il caso in cui V sia il sottospazio generato da un vettore $a \in \mathbb{R}^n$, diverso da 0_n. Cosi'

$$V = \{ar;\ r \in \mathbb{R}\} = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r;\ r \in \mathbb{R}\},$$

e

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n :\ a'x = 0\} = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n :\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$

Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r,$$

$$a_1q_1 + \cdots + a_nq_n = 0.$$

Lo scalare r e' dato da

$$r = (a'a)^{-1}a'b = \frac{a'b}{a'a} = \frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{a_1^2 + \cdots + a_n^2},$$

che e' il coefficiente di Fourier $cf(b, a)$ di b rispetto ad a.

7. Con riferimento al punto precedente, per $a = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ si ha che ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} r,$$
$$q_1 + \cdots + q_n = 0.$$

Lo scalare r e' dato da

$$r = \frac{a'b}{a'a} = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}.$$

Si noti che $r = \mu_b$, la media delle componenti di b.

La scomposizione del vettore $b \in \mathbb{R}^n$ e' dunque

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_b \\ \vdots \\ \mu_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \mu_b \\ \vdots \\ b_n - \mu_b \end{bmatrix}.$$

8. **Proiezione ortogonale su sottospazi di dimensione 2**

Consideriamo il caso in cui V sia il sottospazio generato da due vettori $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$, linearmente indipendenti. Cosi'

$$V = \{a_1 r_1 + a_2 r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \{\left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right] r;\ r \in \mathbb{R}^2\},$$
$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n :\ a_1' x = a_2' x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array}\right] x = 0_2\}.$$

Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = a_1 r_1 + a_2 r_2$$

$$\begin{cases} a_1' q = 0 \\ a_2' q = 0 \end{cases} .$$

La colonna r e' data da

$$r = \left(\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array} \right] \right)^{-1} \left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array} \right] b = \left[\begin{array}{cc} a_1' a_1 & a_1' a_2 \\ a_2' a_1 & a_2' a_2 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} a_1' b \\ a_2' b \end{array} \right].$$

Osserviamo che, se i due vettori a_1 e a_2 sono ortogonali, allora si ha

$$r = \left[\begin{array}{cc} a_1' a_1 & 0 \\ 0 & a_2' a_2 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} a_1' b \\ a_2' b \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{a_1' a_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2' a_2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a_1' b \\ a_2' b \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{a_1' b}{a_1' a_1} \\ \frac{a_2' b}{a_2' a_2} \end{array} \right].$$

Dunuqe il vettore p proiezione ortogonale di b sullo spazio generato dai vettori a_1 e a_2 e' dato da

$$p = a_1 \frac{a_1' b}{a_1' a_1} + a_2 \frac{a_2' b}{a_2' a_2}$$

cioe' e' la combinazione lineare di a_1 e a_2 con coefficienti i coefficienti di Fourier di b rispetto ad a_1 e a_2.