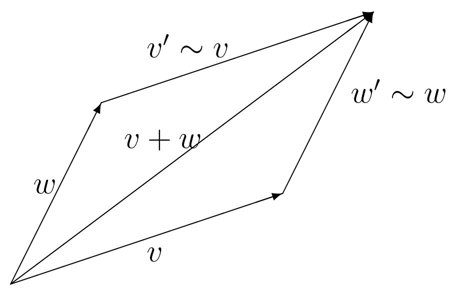
Matematica II, 20.12.11

1. **Lunghezza di un vettore nel piano**

   Consideriamo il piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$. Scelto un segmento come unita', possiamo parlare di lunghezza di un vettore $v \in \mathfrak{P}_O$ rispetto a tale segmento unita'; indichiamo tale lunghezza col simbolo $\|v\|$.

   La lunghezza dei vettori e' legata alle operazioni sui vettori nel modo seguente:

   - Consideriamo due vettori v, w e il vettore $v + w$ loro somma.

     Osserviamo che un punto che partendo da O si sposta prima lungo il vettore v e poi si sposta lungo il vettore $w' \sim w$ descrive due lati di un triangolo che ammette il vettore $v + w$ come terzo lato. Ora, la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Si ha cosi' si ha disuguaglianza

     $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

     detta appunto *disuguaglianza triangolare.*

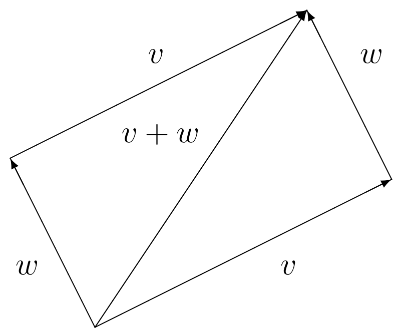
   - Consideriamo un vettore v, uno scalre r e il vettore vr multiplo di v secondo r. Allora:

     $$\|rv\| = |r|\|v\|,$$

     dove $|r|$ e' il valore assoluto di r.

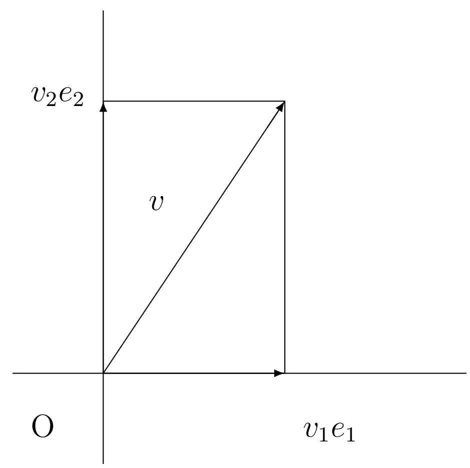
   Il teorema di Pitagora puo' essere espresso nella forma seguente: se due vettori v e w sono fra loro ortogonali, allora il quadrato della lunghezza del vettore somma $v + w$ e' uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei vettori addendi v, w :

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$



2. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O nel quale i vettori canonici e_1 ed e_2 abbiano lunghezza 1, ed identifichiamo $\mathfrak{P}_O$ con $\mathbb{R}^2$.

   Se $v = [v_i]_1^2$, allora $v = v_1e_1 + v_2e_2$, e il vettore v e' la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori v_1e_1 e v_2e_2,



   cosi' dal teorema di Pitagora si ha

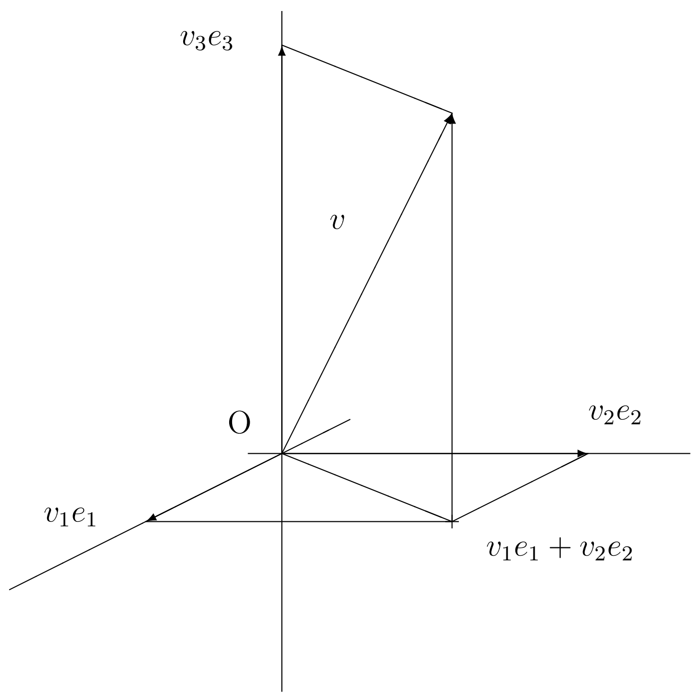
$$\begin{aligned}\|v\| &= \sqrt{\|v_1e_1\|^2 + \|v_2e_2\|^2} \\ &= \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.\end{aligned}$$

3. **Lunghezza di un vettore nello spazio**

Consideriamo lo spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$. Scelto un segmento come unita', possiamo parlare di lunghezza di un vettore $v \in \mathfrak{S}_O$ rispetto a tale segmento unita'; indichiamo tale lunghezza col simbolo $\|v\|$.

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O nel quale i vettori canonici e_1, e_2 ed e_3 abbiano lunghezza 1, ed identifichiamo $\mathfrak{P}_O$ con $\mathbb{R}^3$.

Se $v = [v_i]_1^3$, allora $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, e il vettore v e' la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori $v_1e_1 + v_2e_2$ e v_3e_3,



cosi' dal teorema di Pitagora si ha

$$
\begin{aligned}
\|v\| &= \sqrt{\|v_1e_1 + v_2e_2\|^2 + \|v_3e_3\|^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + |v_3|^2} \\
&= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.
\end{aligned}
$$

4. **Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$.**

   Def. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ definiamo la lunghezza $\|v\|$ di un vettore $v = [v_i]_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{v'v}.$$

   Solitamente, al termine *lunghezza* si preferisce il termine *norma.*

   Nel caso $n = 1$ si ha che la norma di un numero reale r e' data da

$$\|r\| = \sqrt{r^2} = |r|,$$

   il valore assoluto di r.

   Si osservi che per i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si ha

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \ldots = \|e_n\| = 1.$$

   Un vettore che come questi ha norma 1 si dice *versore.*

5. Le principali proprieta' della norma dei vettori in $\mathbb{R}^n$ sono:

   - la norma di un vettore e' sempre maggiore-uguale a zero e vale zero se e solo se il vettore e' nullo:
     $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n;$
     $\|v\| = 0 \quad$ *se e solo se* $\quad v = 0_n.$
   - La norma del vettore prodotto di un vettore per uno scalare e' uguale al prodotto della norma del vettore per il valore assoluto dello scalare:
     $$\|rv\| = |r|\|v\|, \qquad r \in \mathbb{R}.$$
   - La norma del vettore somma e' minore o uguale alla somma delle norme dei vettori addendi:
     $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$
     Questa disuguaglianza viene detta *disuguaglianza triangolare*, per il significato che assume nel piano e nello spazio.

La prime due proprieta' si verificano facilmente. Ad esempio, la seconda si verifica cosi':

$$\|rv\| = \sqrt{(rv)'(rv)} = \sqrt{r^2(v'v)} = |r|\sqrt{v'v} = |r|\|v\|.$$

La terza proprieta' non si verifica cosi' facilmente.

6. La norma e' legata al prodotto interno dalla seguente disuguaglianza (di Cauchy-Schwarz)

   - Per ogni v, w in $\mathbb{R}^n$ si ha

     $$|v'w| \leq \|v\|\|w\|;$$

     l'uguale vale se e solo se v, w sono linearmente dipendenti.

   Non dimostriamo questa disuguaglianza. La verfichiamo nel caso in cui $v = e_1$, il primo vettore della base canonica, e $w = [w_i]_1^n$, un vettore qualsiasi. Al primo membro si ha

   $$|e_1'w| = |w_1|\,;$$

   al secondo membro si ha

   $$\|e_1\|\|w\| = 1\|w\| = \sqrt{\sum_1^n w_i^2}.$$

   E in effetti si ha

   $$|w_1| = \sqrt{w_1^2} \leq \sqrt{\sum_1^n w_i^2}.$$

   La disuguaglianza di Cauchy-Scwarz si puo' usare per definire l'angolo, meglio il coseno dell'angolo, fra due vettori di $\mathbb{R}^n$.

7. Un semplice conto particolarmente interessante:

   $$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= (v+w)'(v+w)\\ &= (v'+w')(v+w)\\ &= v'v + v'w + w'v + w'w\\ &= \|v\|^2 + 2v'w + \|w\|^2.\end{aligned}$$

Se v e w sono ortogonali, si ha $v'w = 0$, e

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

cioe' il Teorema di Pitagora.

8. **Soluzioni ai minimi quadrati**

   Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases}.$$

   Questo sistema non ha soluzioni.

   Per ogni valore $s \in \mathbb{R}$ dell'incognita x, possiamo considerare il vettore degli scarti fra i primi e i secondi membri

$$E(s) = \begin{bmatrix} s - 3 \\ s - 9 \end{bmatrix}$$

   come *l'errore* che si commette assumendo che s sia una soluzione del sistema; questo errore e' un vettore di $\mathbb{R}^2$, che possiamo misurare con la sua norma

$$\|E(s)\| = \sqrt{(s-3)^2 + (s-9)^2}.$$

   Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} \|E(4)\| &= \sqrt{(4-3)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{26}, \\ \|E(5)\| &= \sqrt{(5-3)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{20}. \end{aligned}$$

   Poiche' $\sqrt{20} < \sqrt{26}$, siamo condotti a preferire $s = 5$ a $s = 4$. Ci possiamo chiedere se c'e' una scelta ottima per s.

9. Consideriamo il generico sistema lineare di due equazioni in una incognta

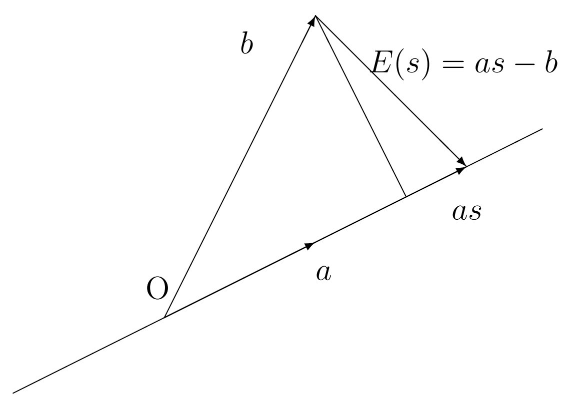
$$\begin{cases} a_1 x = b_1 \\ a_2 x = b_2 \end{cases}, \qquad \textit{in breve} \quad ax = b,$$

   dove supponiamo che $a \neq 0_2$.

Se il vettore b sta sulla retta generata dal vettore a, allora il sistema ha soluzione, una ed una sola soluzione.

Se il vettore b non sta sulla retta generata dal vettore a, allora il sistema non ha soluzione.

Per ogni $s \in \mathbb{R}$, il vettore scarto $E(s) = as - b$, l'errore che commettiamo assumendo che s sia una soluzione, puo' essere visto come il vettore che ha origine nel punto finale di b e termine nel punto finale di as



Vediamo allora che c'e' una scelta ottima per s, quella che rende as uguale alla proiezione ortogonale di b sulla retta generata da a : bisogna prendere s come il coefficiente di Fourier di b rispetto ad a :

$$\frac{b'a}{a'a}.$$

Nell'esempio del punto precedente, la scelta ottima per s e'

$$\frac{\begin{bmatrix} 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{12}{2} = 6.$$

10. Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Per ogni valore $s \in \mathbb{R}^n$ dell'incognita x, possiamo considerare il vettore scarto fra il primo ed il secondo membro

$$E(s) = As - b$$

come *l'errore* che si commette assumendo che s sia una soluzione del sistema; questo errore e' un vettore di $\mathbb{R}^m$, che possiamo misurare con la sua norma

$$\|E(s)\| = \|As - b\|.$$

Si noti che s e' una soluzione del sistema se e solo se $E(s) = 0_m$, se e solo se $\|E(s)\| = 0$.

Un vettore $s^* \in \mathbb{R}^n$ cui corrisponde un errore di norma minima, cioe' tale che

$$\|E(s^*)\| \leq \|E(s)\| \qquad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

si dice *soluzione ai minimi quadrati* del sistema.

Teorema 1. *Sia $Ax = b$, un sistema lineare di m equazioni in n incognite.*

- *Le soluzioni ai minimi quadrati del sistema $Ax = b$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema di n equazioni in n incognite*

$$A'A\ x = A'b;$$

- *questo sistema ha sempre qualche soluzione; la soluzione e' unica se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti; in questo caso, l'unica soluzione e' data da*

$$x = (A'A)^{-1} A'b.$$

Dunque abbiamo che

> *un sistema lineare $Ax = b$ ha sempre qualche soluzione ai minimi quadrati; la soluzione ai minimi quadrati e' unica se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti; in questo caso, l'unica soluzione ai minimi quadrati e' data dal coefficiente di Fourier di b rispetto ad A.*