Matematica II, aa 2011-2012

Il corso si e' svolto su cinque temi principali: sistemi lineari, algebra delle matrici, determinati, spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, spazio euclideo $\mathbb{R}^n$; per ogni tema descrivo gli argomenti svolti, e quali loro aspetti saranno oggetto di verifica nell'esame; gli aspetti tra parentesi verranno verificati solo in funzione del massimo voto.

1. **Sistemi lineari**

   Equazione lineare, sistema lineare, soluzione, sistema determinato, indeterminato, impossibile, sistemi equivalenti, operazioni elementari sulle equazioni. Matrice associata a un sistema lineare; operazioni elementari sulle righe di una matrice; matrici triangolari, matrici triangolari nondegeneri, processo di triangolarizzazione, applicazione ai sistemi lineari; matrici a scala, algoritmo di Gauss, matrici a scala ridotta, algoritmo di Gauss-Jordan, applicazione ai sistemi lineari. Th. sui sistemi lineari di m equazioni in $n > m$ incognite; caso dei sistemi lineari omogenei.

   > Conoscere il significato dei termini. Saper applicare l'algoritmo di Gauss e l'algoritmo da Gauss-Jordan per decidere se un sistema e' determinato, indeterminato, impossibile, e, se possibile, risolverlo. Conoscere l'enunciato dei Th. sui sistemi lineari di m equazioni in $n > m$ incognite. [Conoscere il significato della frase "genericamente, un sistema lineare di n equazioni in n incognite e' determinato"].

2. **Algebra delle matrici**

   Ennuple, righe, colonne; prodotto di una riga per una colonna, rappresentazione $a'x = b$ di una equazione lineare; matrici, notazione Matlab; prodotto di due matrici, rappresentazione $Ax = b$ di un sistema lineare. Matrici unita'; proprieta' associativa; elevamento a potenza con esponente naturale. Matrice inversa, unicita', proprieta' dell'inversione; Th. sui sistemi $Ax = b$ con A invertibile; elevamento a potenza con esponente intero relativo. Prodotto di un numero reale per una matrice, matrici scalari; matrici diagonali, moltiplicazione per una matrice diagonale, potenze di una matrice diagonale; autovettori ed autovalori di una matrice, e loro uso nello studio delle potenze di una matrice. Somma di due matrici; rappresentazione $a_1x_1+\cdots+a_nx_n = b$ di un sistema lineare. Proprieta' distributive del prodotto rispetto alla somma di matrici. Trasposta di una matrice, proprieta' della trasposizione rispetto alle altre operazioni.

> Conoscere il significato dei termini. Sapere effettuare e descrivere in tutta generalita' le operazioni sulle matrici; conoscere le proprieta' di tali operazioni; [sapere dimostrare queste proprieta']; saper verificare la consistenza di espressioni matriciali. Sapere come si possono rappresentare sinteticamente equazioni e sistemi lineari. Conoscere l'enunciato del Th. sui sistemi $Ax = b$ con A invertibile; saperlo dimostrare. Sapere, in concreto e in tutta generalita', come si usano autovalori ed autovettori per lo studio delle potenze di una matrice.

3. **Determinanti**

   Determinante di una matrice quadrata, definizione tramite sviluppi di Laplace per colonne; invarianza per trasposizione; proprieta' del determinante rispetto alle colonne/righe. Teorema di Cramer per un sistema $Ax = b$ con A quadrata; caso di un sistema lineare omogeneo. Algoritmo di Gauss per il calcolo di un determinante. Moltiplicativita' del determinante; invertibilta' di una matrice e non annullamento del suo determinante. Th. su autovalori e polinomio caratteristico di una matrice quadrata.

> Conoscere il significato dei termini. Conoscere la definizione di determinante tramite sviluppi di Laplace per colonne. Conoscere le proprieta' del determinante rispetto alle colonne/righe. Saper ricavare la regola di Cramer per i sistemi del II ordine [di ordine qualsiasi]. Conoscere l'enunciato del Th. di Cramer sui sistemi lineari quadrati, nel caso generale e in quello omogeneo. Conoscere le proprieta' del determinante rispetto alla moltiplicazione e all'inversione di matrici. Conoscere e saper dimostrare il Th. su autovalori e polinomio caratteristico di una matrice quadrata.

4. **Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$**

   Piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$. Scomposizione di un vettore rispetto ad una coppia di rette per O; combinazioni lineari; rappresentazione dei vettori su una retta per O e dei vettori del piano come combinazioni lineari di uno e due vettori, rispettivamente. Spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$. Scomposizione di un vettore rispetto ad una coppia piano e retta per O; rappresentazione dei vettori su una retta per O, dei vettori su un piano per O, e dei vettori dello spazio come combinazioni lineari di uno, due, e tre vettori. Identificazione fra $\mathfrak{P}_O$ e $\mathbb{R}^2$; identificazione fra $\mathfrak{S}_O$ e $\mathbb{R}^3$. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$; rappresentazioni di un vettore come combinazione lineare di m vettori in $\mathbb{R}^n$ e soluzioni di un sistema lineare di n equazioni in m incognite; dipendenza/ indipendenza lineare; Th. di caratterizzazione della dipendenza/ indipendenza lineare; caso di due vettori; base canonica di $\mathbb{R}^n$. Th. sul massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$. Sottospazi di $\mathbb{R}^n$; sottospazio generato da un insieme di vettori; sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Dimensione di un sottospazio; Th. di identificazione di un sottospazio $m-$dimensionale con $\mathbb{R}^m$; Th. sulla dimensione dei sottospazi generati da un insieme di vettori, o costituiti delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

   > Conoscere il significato dei termini. In $\mathfrak{P}_O$, saper rappresentare una combinazione lineare; saper descrivere l'identificazione fra $\mathfrak{P}_O$ e $\mathbb{R}^2$. In $\mathfrak{S}_O$, saper descrivere tramite combinazioni lineari i vettori su una retta per O, o su un piano per O; saper descrivere l'identificazione fra $\mathfrak{S}_O$ e $\mathbb{R}^3$. In $\mathbb{R}^n$, conoscere e sapere usare la definizione di dipendenza/ indipendenza lineare, e il Th. di caratterizzazione della dipendenza/ indipendenza lineare [saperlo dimostrare]; conoscere l'enunciato e sapere dimostrare il Th. sul massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$. Conoscere la definizione di dimensione di un sottospazio. Conoscere l'enunciato del Th. di identificazione di un sottospazio $m-$dimensionale con $\mathbb{R}^m$ [saperlo dimostrare]. Conoscere gli enunciati dei Th. sulla dimensione di sottospazi generati da un insieme di vettori, o costituiti delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

5. **Spazio euclideo $\mathbb{R}^n$**

In $\mathfrak{P}_O$, ortogonalita' di due vettori, proiezione ortogonale di un vettore su una retta passante per O; rappresentazione analitica in $\mathbb{R}^2$ della relazione di ortogonalita'. Formula per la proiezione ortogonale di un vettore su una retta per O. In $\mathfrak{S}_O$, ortogonalita' di due vettori, proiezione ortogonale di un vettore su un piano passante per O; rappresentazione analitica in $\mathbb{R}^3$ della relazione di ortogonalita'. Formula per la proiezione ortogonale di un vettore su un piano per O. In $\mathbb{R}^n$, prodotto interno di due vettori e sue proprieta', ortogonalita' fra due vettori e sue proprieta'; proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio, e relativa formula; coefficiente di Fourier di un vettore rispetto a una matrice; proiezione ortogonale su sottospazi di dimensione uno e due. In $\mathfrak{P}_O$, lunghezza di un vettore rispetto ad una unita' di misura, e sue proprieta'; teorema di Pitagora. Rappresentazione analitica in $\mathbb{R}^2$ della lunghezza di un vettore in $\mathfrak{P}_O$; rappresentazione analitica in $\mathbb{R}^3$ della lunghezza di un vettore in $\mathfrak{S}_O$. In $\mathbb{R}^n$, norma di un vettore e sue proprieta'; disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, teorema di Pitagora. Soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare. Th. di esistenza, eventuale unicita', e formula, per le soluzioni ai minimi quadrati di un sistema lineare.

> Conoscere il significato dei termini. Conoscere l'espressione analitica in $\mathbb{R}^2$ della relazione di ortogonalita' in $\mathfrak{P}_O$; conoscere la definizione di proiezione ortogonale di un vettore su una retta per O, e sapere ricavare la corrispondente formula. Conoscere l'espressione analitica in $\mathbb{R}^3$ della relazione di ortogonalita' in $\mathfrak{S}_O$; conoscere la definizione di proiezione ortogonale di un vettore su un piano per O, e sapere ricavare la corrispondente formula. In $\mathbb{R}^n$, conoscere la definizione di prodotto interno, le sue proprieta', la definizione di ortogonalita', le sue proprieta'; conoscere la definizione di proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio, e saper ricavare la corrispondente formula. [Sapere esprimere questa formula come funzione dei vettori in gioco e dei loro prodotti interni.] In $\mathfrak{P}_O$, conoscere le proprieta' della lunghezza, e la formulazione del Th. di Pitagora. Saper ricavare l'espressione analitica in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ della lunghezza in $\mathfrak{P}_O$ e $\mathfrak{S}_O$, rispettivamente. In $\mathbb{R}^n$, conoscere la definizione norma, le sue proprieta', la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, il Th. di Pitagora; saper di-

mostrare quest'ultimo. Conoscere la definizione di soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare; [saper dimostrare esistenza, unicita', e ricavare formula, per la soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare $ax = b$, con $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0_2$.] Conoscere l'enunciato del Th. sulle soluzioni ai minimi quadrati di un sistema lineare.