Algebra Lineare (Matematica C.I.), 12.11.13

Matrice inversa

1. Per $n = 1$, l'insieme $\mathbb{R}^{n\times n}$ delle matrici quadrate di ordine n diventa l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e la moltiplicazione di matrici diventa la moltiplicazione di numeri reali.

   In $\mathbb{R}$, il numero 1 e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto di 1 per un qualsiasi altro numero reale e' uguale a quell'altro numero reale:

   $1\,a = a = a\,1, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

   L'inverso a^{-1} di un numero reale non nullo a e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto del numero reale per il suo inverso e' uguale a 1:

   $a\,a^{-1} = 1 = a^{-1}\,a.$

   Un'equazione lineare

   $ax = b$

   nell'incognita reale x e' determinata se e solo se $a \neq 0$, e in tal caso l'unica soluzione si ottiene moltiplicando entrambi i membri per a^{-1} :

   $a^{-1}ax = a^{-1}b; \qquad 1x = a^{-1}b; \qquad x = a^{-1}b.$

   In questa lezione vedremo come queste nozioni e questi fatti si estendono al caso delle matrici quadrate di un qualsiasi ordine $n \geq 1$.

2. **Matrice inversa**

   Definizione *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se esiste una matrice B quadrata di ordine n tale che*
   $$AB = I_n = BA,$$
   allora si dice che A e' invertibile, e che B e' una inversa di A

   Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se una matrice B quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla sinistra di A e se una matrice C quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla destra di A, allora queste due matrici coincidono; infatti
   $$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$
   Dunque se A possiede un'inversa, questa e' unica; essa viene detta *la* matrice inversa di A, e viene denotata con
   $$A^{-1}.$$
   Nella discussione dei seguenti esempi usiamo un approccio diretto. Vedremo in seguito un metodo efficiente per decidere se una matrice e' invertibile o meno e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chiedersi se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} p+q & r+s \\ p+2q & r+2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p+q=1 \\ r+s=0 \\ p+2q=0 \\ r+2s=1 \end{cases}.$$

Questo sistema lineare di quattro equazioni in quatto incognite in realta' consiste di due sistemi di due equazioni in due incognite ciascuno. Dalle prima e terza equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite p, q :

$p = 2,$

$q = -1;$

dalla seconda e dalla quarta equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite r, s :

$r = -1,$

$s = 1;$

Dunque c'e' una ed una sola matrice inversa destra di A, ed e'

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che B e' anche inversa sinistra di A :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque B e' l'inversa di A :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chedersi se esiste una matrice

$$\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p + 2q = 1 \\ r + 2s = 0 \\ 2p + 4q = 0 \\ 2r + 4s = 1 \end{cases}.$$

Ora, la seconda e la quarta equazione di questo sistema sono incompatibili. Dunque A non possiede alcuna inversa destra, e a maggior ragione non possiede alcuna inversa.

Concludiamo questo paragrafo osservando due proprieta': se una matrice A e' invertibile, anche la sua inversa A^{-1} e' invertibile, e si ha

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$$

se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche il loro prodotto AB e' invertibile, e l'inversa di AB e' il prodotto delle inverse, nell'ordine opposto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Verifichiamo questa seconda proprieta':

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$
$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

3. Applicazione ai sistemi lineari

Teorema 1 *Se una matrice A quadrata di ordine n possiede inversa, allora ciascun sistema lineare di n equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti A*

$$Ax = b \qquad (b \in \mathbb{R}^n)$$

e' determinato; inoltre, la sua soluzione e' data da

$$x = A^{-1}b.$$

Dimostrazione. Dal fatto che A^{-1} e' inversa sinistra di A, ricaviamo

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \\ \left(A^{-1}A\right)x &= A^{-1}b \\ I_n x &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Usando il fatto che A^{-1} e' inversa destra di A, mostriamo che questa e' davvero una soluzione:

$$A\left(A^{-1}b\right) = \left(AA^{-1}\right)b = I_n b = b.$$

cvd

Esempio. Sappiamo che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e' invertible e che

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per il Th. precedente, possimo dire che ciascuno dei sistemi $Ax = b$ cioe'

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 = b_2 \end{cases}$$

e' determinato, e la sua soluzione e' data da $x = A^{-1}b$, cioe'

$$\begin{cases} x_1 = 2b_1 - b_2 \\ x_2 = -b_1 + b_2 \end{cases}.$$

Il teorema precedente ha anche un inverso, che enunciamo senza dimostrare.

Teorema 2 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se tutti i sistemi lineari aventi matrice dei coefficienti A*

$$Ax = b \qquad (b \in \mathbb{R}^n)$$

sono determinati, allora A e' invertibile.

4. **Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa.**

   L'algoritmo di Gauss-Jordan puo' essere usato per calcolare in modo efficiente l'inversa di una matrice.

Teorema *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Si consideri la matrice*

$$[A|I_n]$$

ottenuta affiancando ad A la matrice I_n unita' di ordine n. A questo matrice si applichi l'algoritmo di Gauss-Jordan. Se si ottiene una matrice della forma

$$[I_n|B],$$

allora A e' invertibile, e $A^{-1} = B$; altrimenti A non e' invertibile.

Esempio Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Affianchiamo ad A la matrice unita' I_3 :

$$\left[\ A \mid I_3\ \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

applichiamo l'algorimo di Gauss, e otteniamo la matrice a scala

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right];$$

continuando con l'algoritmo di Gauss-Jordan si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[\ I_3 \mid B\ \right].$$

Dunque A e' invertibile e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Esempio Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Affianchiamo ad A la matrice unita' I_3 :

$$[\ A \mid I_3\ ] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

applichiamo l'algoritmo di Gauss, e otteneniamo prima la matrice a scala

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Osserviamo che nel blocco di sinistra ci sono 2 pivot; dopo aver completato l'applicazione dell'algoritmo di Gauss-Jordan in tale blocco ci saranno ancora 2 pivot; dunque il blocco di sinistra non potra' essere uguale a I_3.

Concludiamo che la matrice A non e' invertibile.

5. **Potenze**

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero realtivo $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, la potenza $p-$ma della matrice A e' definita da

$$A^p = \begin{array}{lll} A\,A\,\cdots\,A \quad (p \text{ volte}) & & \textit{per } p > 0 \\ & & \\ I_n & & \textit{per } p = 0 \\ & & \\ A^{-1}\,A^{-1}\,\cdots\,A^{-1} \quad (-p \text{ volte}) & & \textit{per } p < 0 \end{array} ;$$

le potenze con esponente negativo sono dunque definite solo per matrici invertibili.

Esempio:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Valgono le usuali proprieta' delle potenze:

$A^p A^q = A^{p+q}$;

$(A^p)^q = A^{pq}$;

la proprieta'

$(AB)^p = A^p B^p$

vale sotto al condizione che A e B siano permutabili, cioe' $AB = BA$.