Algebra Lineare (Matematica C.I.), 12.11.13

Sistemi di equazioni lineari

1. Un' *equazione lineare* in una incognita reale x e' un'equazione del tipo

   $$ax = b,$$

   dove a e b sono numeri reali dati; a e' il coefficiente dell'incognita x e b e' il termine noto dell'equazione. Una *soluzione* dell'equazione e' un numero reale r che sostituito all'incognita x renda vera l'uguaglianza:

   $ar = b.$

   Un'equazione con una ed una sola soluzione si dice determinata, un'equazione con nessuna soluzione si dice impossibile, un'equazione con piu' di una soluzione si dice indeterminata.

   Per ogni $a \neq 0$ l'equazione $ax = b$ ha una ed una sola soluzione $x = \frac{b}{a}$, e cosi' e' determinata.

   Per $a = 0$ l'equazione diviene $0x = b$; per $b \neq 0$ questa equazione non ha alcuna soluzione, cioe' e' impossibile.

   Per $a = b = 0$ l'equazione diviene $0x = 0$; questa equazione ha come soluzione ciascun numero reale, dunque in particolare e' indeterminata.

2. **Sistemi di equazioni lineari in due incognite**

   Un'equazione lineare in due incognite reali x e y e' un'equazione del tipo

   $$ax + by = c,$$

   dove a, b e c sono numeri reali dati; a e b sono i coefficienti delle incognite e c e' il termine noto dell'equazione. Una *soluzione* dell'equazione e' una coppia ordinata (r, s) di numeri reali che sostituiti ordinatamente alle incognite x e y renda vera l'uguaglianza:

   $ar + bs = c.$

   L'insieme delle soluzioni di una tale equazione si puo' riguardare dunque come un sottinsieme del piano $\mathbb{R}^2$.

   Un sistema di equazioni lineari in due incognite reali x e y e' una sequenza di equazioni lineari in x e y :

   $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \vdots \\ a_mx + b_my = c_m \end{cases}$$

Una *soluzione* dell sistema e' una coppia ordinata (r,s) di numeri reali che sia soluzione di ciascuna equazione del sistema.

Un sistema con una ed una sola soluzione si dice determinato, un sistema con nessuna soluzione si dice impossibile, un sistema con piu' di una soluzione si dice indeterminato.

3. Consideriamo l'equazione

   $$2x + 3y = 4.$$

   Questa equazione ha almeno le due soluzioni $(2,0)$ e $(0,4/3)$, dunque e' indeterminata. Per risolverla, possiamo esplicitare la y in funzione della x

   $$y = -(2/3)x + 4$$

   e lasciare l'incognita x libera di assumere qualsiasi valore reale. Le soluzioni dell'equazione sono le coppie ordinate

   $$(p, -(2/3)p + 4),$$

   ottenute al variare del parametro reale p.

   L'insieme delle soluzioni dell'equazione e' una retta nel piano $\mathbb{R}^2$, la retta di pendenza $-2/3$ che passa per il punto $(0,4/3)$.

4. Consideriamo una qualsiasi equazione lineare

   $$ax + by = c.$$

   nelle incognite x, y.

   Se una incognita ha coefficiente $\neq 0$, allora: possiamo ricavare quella incognita in funzione dell'altra e lasciare quest'altra incognita libera di variare in $\mathbb{R}$; l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro libero; e queste soluzioni descrivono una retta nel piano. Ogni retta nel piano si puo' rappresentare come l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare di questo tipo.

   Ciascuna equazione del tipo

   $$0x + 0y = c$$

   in cui c e' diverso da 0 ha per insieme delle soluzioni l'insieme vuoto.

   L'equazione

   $$0x + 0y = 0$$

   ha per insieme delle soluzioni l'intero piano.

5. Ora consideriamo i sistemi di due equazioni lineari in due incognite x e y. Se una delle due equazioni e' della forma $0x + 0y = 0$, allora il sistema si riduce ad una sola equazione, l'altra; se una delle due equazioni e' della forma $0x + 0y = c$ con $c \neq 0$, allora il sistema e' impossibile. Consideriamo dunque i sistemi in cui ciascuna delle due equazioni e' della forma $ax + by = c$ dove

uno almeno fra a e b e' diverso da 0. Ciascuna delle due equazioni allora sara' rappresentata da una retta nel piano, e il sistema sara' rappresentato dalla loro intersezione. Cosi' come in generale ci si aspetta che due rette nel piano siano incidenti in un punto, ma possono presentarsi i casi in cui le rette siano parallele o coincidenti, allo stesso modo in generale ci si aspetta che il sistema sia determinato, ma possono presentarsi i casi in cui il sistema sia impossibile o indeterminato.

6. Consideriamo il sistema di due equazioni nelle incognite x e y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

Possiamo risolvere questo sistema col metodo di sostituzione.

Ricaviamo dalla prima equazione l'incognita x in funzione dell'incognita y :

$x = -(3/2)y + 2$

e sostituiamo ad x nella seconda equazione questa espressione, ottenendo cosi' un'equazione nella sola incognita y

$5(-(3/2)y + 2) + 6y = 7, \qquad -(3/2)y = -3;$

da questa equazione otteniamo il valore della y

$y = 2,$

e sostiuendo questo valore della y nell'espressione di x in funzione di y otteniamo il valore della x

$x = -(3/2)2 + 2 = -1.$

Il sistema ha l'unica soluzione

$$(-1, 2).$$

Ciascuna delle due equazioni ha per insieme delle soluzioni una retta, e le due rette sono incidenti nel punto $(-1, 2)$

7. Consideriamo il sistema di due equazioni nelle incognite x e y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$$

Osserviamo che le due equazioni sono incompatibli in quanto $4x + 6y = 2(2x + 3y)$ ma $7 \neq 2 \cdot 4$; dunque il sistema non ha soluzioni, e' impossibile. Ciascuna delle due equazioni ha per insieme delle soluzioni una retta, e le due rette sono parallele.

8. Consideriamo il sistema di due equazioni nelle incognite x e y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

Osserviamo che le due equazioni sono una conseguenza dell'altra, dunque il sistema siriduce all'unica equazione

$$2x + 3y = 4,$$

ed e' indeterminato. Le due equazioni hanno come insieme delle soluzioni una stessa retta.

9. Ora consideriamo i sistemi di tre equazioni lineari in due incognite x e y. Consideriamo i sistemi in cui ciascuna delle tre equazioni e' rappresentata da una retta nel piano. Cosi' come in generale ci si aspetta che tre rette non siano incidenti in un unico punto, ma possono presentarsi anche altri casi, allo stesso modo in generale ci si aspetta che il sistema sia impossibile, ma possono presentarsi anche i casi in cui sia determinato o indeterminato.

10. **Sistemi di equazioni lineari in tre incognite**

    Un'equazione lineare in tre incognite reali x, y e z e' un'equazione del tipo

    $$ax + by + cz = d,$$

    dove a, b, c e d sono numeri reali dati. Una *soluzione* dell'equazione e' una terna ordinata (r, s, t) di numeri reali che sostituiti ordinatamente alle incognite x, y, z renda vera l'uguaglianza:

    $$ar + bs + ct = d.$$

    L'insieme delle soluzioni di una tale equazione si puo' riguardare dunque come un sottinsieme dello spazio $\mathbb{R}^3$.

    Un sistema di equazioni lineari in tre incognite reali x, y, z e' una sequenza di equazioni lineari in x, y, z :

    $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \vdots \\ a_mx + b_my + c_mz = d_m \end{cases}$$

    Una *soluzione* dell sistema e' una terna ordinata (r, s, t) di numeri reali che sia soluzione di ciascuna equazione del sistema.

11. Consideriamo l'equazione

    $$2x + 3y + 4z = 12.$$

    Questa equazione ha almeno le tre soluzioni $(6, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ e $(0, 0, 3)$, dunque e' indeterminata. Per risolverla, possiamo esplicitare la x in funzione della y e della z

    $$x = -\tfrac{3}{2}y - 2z + 6,$$

e lasciare le incognite y e z libere di assumere qualsiasi valore reale. Le soluzioni dell'equazione sono le terne ordinate

$$(-(3/2)p - 2q + 6, p, q),$$

ottenute al variare dei parametri reali p e q.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione e' un piano nello spazio $\mathbb{R}^3$.

12. Consideriamo una qualsiasi equazione lineare

    $$ax + by + cz = d.$$

    nelle incognite x, y, z.

    Se una incognita ha coefficiente $\neq 0$, allora: possiamo ricavare quella incognita in funzione delle altre due e lasciare queste altre incognite libere di variare in $\mathbb{R}$; l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri liberi; queste soluzioni descrivono un piano nello spazio. Ogni piano nello spazio si puo' rappresentare come l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare di questo tipo.

    Ciascuna equazione del tipo

    $$0x + 0y + 0z = d$$

    in cui d e' diverso da 0 ha per insieme delle soluzioni l'insieme vuoto.

    L'equazione

    $$0x + 0y + 0z = d$$

    ha per insieme delle soluzioni l'intero spazio.

13. Ora consideriamo i sistemi di due equazioni lineari in tre incognite x, y e z. Se una delle tre equazioni e' della forma $0x + 0y + 0z = 0$, allora il sistema si riduce ad una sola equazione, l'altra; se una delle due equazioni e' della forma $0x + 0y + 0z = d$ con $d \neq 0$, allora il sistema e' impossibile. Consideriamo dunque i sistemi in cui ciascuna delle due equazioni e' della forma $ax + by + cz = d$ dove uno almeno fra a, b, c e' diverso da 0. Ciascuna delle due equazioni allora sara' rappresentata da un piano nello spazio, e il sistema sara' rappresentato dalla loro intersezione. Cosi' come in generale ci si aspetta che due piani nello spazio siano incidenti in una retta, ma possono presentarsi i casi in cui i piani siano paralleli o coincidenti, allo stesso modo in generale ci si aspetta che il sistema sia indeterminato con soluzioni che dipendono da un parametro libero, ma possono presentarsi i casi in cui il sistema sia impossibile o indeterminato con soluzioni che dipendono da due parametri liberi.

14. Consideriamo il sistema di due equazioni nelle incognite x, y, z

    $$\begin{cases} x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 7y + 8z &= 3 \end{cases}$$

    Risolviamo questo sistema col metodo di sostituzione.

Ricaviamo dalla prima equazione l'incognita x in funzione delle incognite y, z :

$$x = -2y - 4z + 3$$

e nella seconda equazione sostituiamo ad x questa espressione, ottenendo cosi' un'equazione nelle sole incognite y, z

$$3(-2y - 4z + 3) + 7y + 8z = 3, \qquad y - 4z = -6.$$

Da questa equazione ricaviamo la y in funzione della z :

$$y = 4z - 6.$$

Nell'espressione della x in funzione di y, z sostituiamo questa espressione della y in funzione di z, e otteniamo un'espressione della x in funzione della z :

$$x = -2(4z - 6) - 4z + 3 = -12z + 15.$$

Abbiamo dunque ricavato la x e la y in funzione della z

$$\begin{array}{l} x = -12z + 15 \\ y = 4z - 6 \end{array};$$

la z puo' variare liberamente in $\mathbb{R}$. Il sistema ha le infinite soluzioni dipendenti da un parametro libero

$$(-12p + 15, 4p - 6, p).$$

Queste soluzioni descrivono una retta nello spazio.

Ciascuna delle due equazioni ha per insieme delle soluzioni un piano, e i due piani sono incidenti in questa retta.

15. Consideriamo il sistema di due equazioni nelle incognite x, y e z

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = & -4 \\ 3x - 6y + 9z & = & -10 \end{cases}$$

Osserviamo che le due equazioni sono incompatibli in quanto $3x - 6y + 9z = 3 \cdot (x - 2y + 3z)$ ma $-10 \neq 3 \cdot (-4)$; dunque il sistema non ha soluzioni, e' impossibile. Ciascuna delle due equazioni ha per insieme delle soluzioni un piano, e i due piani sono paralleli.

16. Ora consideriamo i sistemi di tre equazioni lineari in tre incognite x, y e z. Consideriamo i sistemi in cui ciascuna delle tre equazioni e' rappresentata da un piano nello spazio. Cosi' come in generale ci si aspetta che tre piani nello spazio siano incidenti in una punto, ma possono presentarsi anche altri casi, allo stesso modo in generale ci si aspetta che il sistema sia determinato, ma possono presentarsi anche i casi in cui il sistema sia impossibile o indeterminato con soluzioni che dipendono da uno o due parametri liberi.

17. Consideriamo il sistema di tre equazioni nelle incognite x, y e z

$$\begin{cases} x+2y+4z &= 3 \\ 3x+7y+8z &= 3 \\ 5x+9y+25z &= 22 \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema col metodo di sostituzione.

$$\begin{cases} x &= -2y-4z+3 \\ 3(-2y-4z+3)+7y+8z &= 3 \\ 5(-2y-4z+3)+9y+25z &= 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= -2y-4z+3 \\ y-4z &= -6 \\ -y+5z &= 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= -2y-4z+3 \\ y &= 4z-6 \\ -(4z-6)+5z &= 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= -2y-4z+3 \\ y &= 4z-6 \\ z &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= -2\cdot(-2)-4\cdot 1+3=3 \\ y &= 4\cdot 1-6=-2 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Il sistema e' determinato, ed ha come unica soluzione

$$(3, -2, 1).$$

Ciascuna delle tre equazioni ha per insieme delle soluzioni un piano, e i tre piani sono incidenti nel punto $(3, -2, 1)$.

18. Consideriamo il sistema di tre equazioni nelle incognite x, y e z

$$\begin{cases} 2x+3y+4z &= 5 \\ 5x+6y+7z &= 6 \\ 7x+9y+11z &= 12 \end{cases}$$

Osserviamo che le tre equazioni sono incompatibli in quanto $7x+9y+11z = (2x+3y+4z)+(5x+6y+7z)$ ma $12 \neq 5+6$; dunque il sistema non ha soluzioni, e' impossibile. Ciascuna delle tre equazioni ha per insieme delle soluzioni un piano; a due a due i piani sono incidenti in rette, ma i tre piani non sono incidenti in un punto.

19. Ora consideriamo i sistemi di quattro equazioni lineari in tre incognite x, y e z. Consideriamo i sistemi in cui ciascuna delle tre equazioni e' rappresentata da un piano nello spazio. Cosi' come in generale ci si aspetta che quattro piani nello spazio abbiano intersezione vuota, ma possono presentarsi anche altri casi, allo stesso modo in generale ci si aspetta che il sistema sia impossibile, ma possono presentarsi anche altri casi.