Algebra Lineare (Matematica C.I.), 13.11.13

1. **Metodo di eliminazione di Gauss. Triangolarizzazione**

   Consideriamo il sistema lineare nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x - 4y + 6z &= 11 \\ -x + 6y - 11z &= -18 \\ 2x - 10y + 20z &= 32 \end{cases}$$

   e mostriamo come questo sistema si puo' risolvere col metodo di eliminazione di Gauss.

   Passo 1. Eliminiamo l'incognita x dalla seconda equazione sommando alla seconda equazione la prima equazione; otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - 4y + 6z &= 11 \\ 2y - 5z &= -7 \\ 2x - 10y + 20z &= 32 \end{cases}$$

   Passo 2. Eliminiamo l'incognita x dalla terza equazione sommando alla terza equazione la prima moltiplicata per -2; otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - 4y + 6z &= 11 \\ 2y - 5z &= -7 \\ -2y + 8z &= 10 \end{cases}$$

   In questi primi due passi abbiamo usato la prima equazione per eliminare l'incognita x dalla seconda e terza equazione.

   Passo 3. Eliminiamo l'incognita y dalla terza equazione sommando alla terza equazione la seconda equazione; otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - 4y + 6z &= 11 \\ 2y - 5z &= -7 \\ 3z &= 3 \end{cases}$$

   Questo e' un esempio di sistema triangolare non degenere.

   Passo 4. Risolviamo il sistema per sostituzione all'indietro:

   dalla terza equazione ricaviamo il valore della z :

   $z = 1;$

   nella seconda equazione sostituiamo il valore di z e ricaviamo il valore della y :

   $2y - 5 = -7, \qquad 2y = -2, \qquad y = -1;$

   nella prima equazione sostituiamo i valori di z e y e ricaviamo il valore della x :

$$x+4+6=11; \qquad x=1.$$

Il sistema e' dunque determinato ed ha soluzione

$$(1,-1,1).$$

2. Consideriamo ora un qualsiasi sistema lineare di tre equazioni A e B e C in tre incognite x, y e z

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & p \\ dx+ey+fz & = & q \\ gx+hy+iz & = & r \end{array} \right.$$

e mostriamo come questo sistema si possa risolvere col metodo di eliminazione di Gauss. Supporremo che siano soddisfatte certe condizioni, poiche' sotto tali condizioni il metodo risulta particolarmente semplice.

Il processo di risoluzione consiste di due parti: nella prima si trasforma il sistema dato in un sistema piu' semplice; nella seconda parte si risolve questo sistema.

L'operazione fondamentale consiste nel sommare ad una equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale; ad esempio sommando alla equazione B l'equazione A moltiplicata per il numero reale m si ottiene l'equazione

$$B+mA \qquad (d+ma)x+(e+mb)y+(f+mc)z=q+mp.$$

Si noti che se $a \neq 0$ allora prendendo $m=-d/a$ si ha un'equazione nella quale x non compare. Un'altra operazione che useremo consiste nello scambiare due equazioni. Un'ultima operazione che puo' essere utile consiste nel moltiplicare un'equazione per un numero reale diverso da zero. Queste operazioni vengono dette "operazioni elementari" sulle equazioni di un sistema.

Supponiamo che nella prima equazione il coefficiente a della x sia diverso da zero. Possiamo allora usare la prima equazione per eliminare la x dalle altre due equazioni; sommiamo alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per $-d/a$, e sommiamo alla terza equazione la prima equazione moltiplicata per $-g/a$; otteniamo un sistema del tipo

$$\begin{array}{l} A := A \\ B := B-(d/a)A \\ C := C-(g/a)A \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & p \\ e'y+f'z & = & q' \\ h'y+i'z & = & r' \end{array} \right.$$

Supponiamo che nella seconda equazione il coefficiente e' della y sia diverso da zero. Possiamo allora usare la seconda equazione per eliminare la y dalla terza equazione; sommiamo alla terza equazione la seconda equazione moltiplicata per $-h'/e'$; otteniamo un sistema del tipo

$$\begin{array}{l} A := A \\ B := B \\ C := C-(h'/e')B \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & p \\ e'y+f'z & = & q' \\ i''z & = & r'' \end{array} \right.$$

Supponiamo che nella terza equazione il coefficiente i'' della z sia diverso da zero.

Quest'ultimo sistema e' evidentemente determinato e puo' essere risolto a partire dalla terza equazione per sostituzione all'indietro.

3. Possiamo rappresentare i dati di cui consiste un sistema lineare con la matrice che ha nelle varie righe i coefficienti e i termini noti delle varie equazioni del sistema.

   Ad esempio possiamo rappresentare il sistema nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x - 4y + 6z &= 11 \\ -x + 6y - 11z &= -18 \\ 2x - 10y + 20z &= 32 \end{cases}$$

   con la matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 6 & 11 \\ -1 & 6 & -11 & -18 \\ 2 & -10 & 20 & 32 \end{array}\right].$$

   Alle operazioni elementari sulle equazioni di un sistema corrispondono delle operazioni sulle righe di una matrice. L'operazione fondamentale consiste nel sommare ad una riga un'altra riga moltiplicata per un numero reale. Un'altra operazione che useremo consiste nello scambiare due righe. Un'ultima operazione che puo' essere utile consiste nel moltiplicare una riga per un numero reale diverso da zero. Queste operazioni vengono dette "operazioni elementari" sulle righe di una matrice.

   Ai passi della prima parte del processo di risoluzione del sistema di sopra corrispondono i seguenti passi sulla matrice associata

   Passo 1. Annulliamo il primo elemento dalla seconda riga sommando alla seconda riga la prima riga; otteniamo la matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 6 & 11 \\ 0 & 2 & -5 & -7 \\ 2 & -10 & 20 & 32 \end{array}\right].$$

   Passo 2. Annulliamo il primo elemento dalla terza riga sommando alla terza riga la prima moltiplicata per -2; otteniamo la matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 6 & 11 \\ 0 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array}\right].$$

   In questi primi due passi abbiamo usato la prima riga per annullare il primo elemento della seconda e terza riga.

Passo 3. Annulliamo il secondo elemento dalla terza riga sommando alla terza riga la seconda riga; otteniamo la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 11 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

Questo e' un esempio di matrice triangolare non degenere.

Sistemi lineari in n incognite.

1. **Equazioni lineari in n incognite.**

Nel seguito, considereremo $n-$ple ordinate

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

di numeri reali. Per $n = 1, 2, 3$ una $n - pla$ si puo' identificare rispettivamente con un punto su una retta, un piano, o nello spazio; si vedra' che i fatti geometrici salienti della geometria dello spazio continuano a valere anche per $n > 3$: gli oggetti avranno pero' natura piu' propriamente algebrica, e cosi' anche i risultati e le loro dimostrazioni.

Un'*equazione lineare* nelle n incognite reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad cioe' \qquad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono costanti reali; gli a_i sono i *coefficienti* e b e' il *termine noto* dell'equazione. Una *soluzione* di questa equazione e' una $n-$pla ordinata $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali che sostituiti alle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendono vera l'uguaglianza:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Se il coefficiente a_1 dell'incognita x_1 e' non nullo, possiamo ricavare x_1 in funzione delle successive incognite, ottenendo

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n + \frac{b}{a_1}$$

e possiamo descrivere l'insieme delle soluzioni come

$$\begin{array}{l} x_1 = -\frac{a_2}{a_1}t_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}t_n + \frac{b}{a_1} \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \\ \vdots \\ x_n = t_n \end{array} \qquad ,$$

dove $t_2, \ldots, t_n$ sono $n-1$ parametri reali liberi. In modo simile si puo' procedere nel caso in cui ci sia almeno un coefficiente a_i non nullo.

Se tutti i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono nulli e il termine noto b e' non nullo, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione e' vuoto; se tutti i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e il termine noto b sono nulli, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione e' tutto R^n.

Le equazioni lineari in n incognite in cui ci sia almeno un coefficiente a_i non nullo hanno dunque un insieme delle soluzioni che dipende da $n-1$ parametri reali liberi; questi insiemi stanno allo spazio $\mathbb{R}^n$ cosi' come le rette stanno al piano $\mathbb{R}^2$, e i piani stanno allo spazio $\mathbb{R}^3$.

2. **Sistemi lineari in n incognite.**

Un *sistema di m equazioni lineari* in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' una sequenza di m equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

in breve

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, \ldots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i *coefficienti* e i b_i sono i *termini noti* del sistema. Una *soluzione* di questo sistema e' una $n-$pla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali soluzione di ciscuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Possiamo rappresentare i dati che caratterizzano il sistema lineare con una matrice avente nelle prima riga i coefficienti e il termine noto della prima equazione, nelle seconda riga i coefficienti e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right];$$

nella prima colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della prima incognita x_1 nelle varie equazioni, nella seconda colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della seconda incognita x_2 nelle varie equazioni, ...

nell'ultima colonna di questa matrice compaiono i termini noti delle varie equazioni.

Un sistema si dice

- *impossibile* se non possiede alcuna soluzione;
- *determinato* se possiede una ed una sola soluzione;
- *indeterminato* se possiede piu' di una soluzione.

Vedremo in seguito che un sistema indeterminato in realta' possiede infinite soluzioni.

Diciamo che due sistemi lineari sono *equivalenti* quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

3. Le *operazioni elementari* sulle equazioni del sistema (1) sono:

   - moltiplicare la $h-$ma equazione per un numero reale $r \neq 0$; questa operazione trasforma la $h-$ma equazione nell'equazione
   $$r\sum_{j=1}^{n} a_{hj}x_j = rb_h, \quad cioe' \quad \sum_{j=1}^{n}(ra_{hj})x_j = rb_h;$$
   - sommare alla $k-$ma equazione la $h-$ma equazione (dove $k \neq h$) moltiplicata per un numero reale r; cosi' la $k-$ma equazione viene trasformata nell'equazione
   $$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + r\sum_{j=1}^{n} a_{hj}x_j = b_k + rb_h,$$
   $$cioe' \quad \sum_{j=1}^{n}(a_{kj} + ra_{hj})x_j = b_k + rb_h$$
   - scambiare la $h-$ma equazione e la $k-$ma equazione.

Le operazioni elementari trasformano un sistema in un sistema ad esso equivalente. Proviamo questa affermazione per la prima operazione; per la seconda e la terza operazione l'affermazione e' chiaramente vera.

Mostriamo dunque che se ad un sistema di equazioni $A, B, C, ...$ applichiamo l'operazione

"sommare alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per il numero reale m"

otteniamo un nuovo sistema di equazioni $A, B + mA, C, ...$ che ha le stesse soluzioni del sistema dato. E' chiaro che ogni soluzione del sistema dato e' anche una soluzione del nuovo sistema. D'altro canto se al nuovo sistema $A, B + mA, C, ...$ applichiamo l'operazione "sottrarre alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per il numero reale m"

otteniamo il sistema dato $A, B, C, ...$ E' allora chiaro che ogni soluzione del nuovo sistema e' anche una soluzione del sistema dato. In conclusione, i due sistemi hanno le stesse soluzioni.

4. Alle operazioni elementari sulle equazioni di un sistema corrispondono delle operazioni sulla matrice del sistema; queste operazioni hanno senso per ogni matrice, come definito di seguito.

   Consideriamo una matrice con p righe e q colonne

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix},$$

   ed indichiamo con $R_1, R_2, \dots, R_p$ le sue righe.

   Le *operazioni elementari sulle righe* della matrice sono

   - moltiplicare la $h-$ma riga per un numero reale $r \neq 0$; questa operazione trasforma la $h-$ma riga nella riga

$$\begin{bmatrix} ra_{h1} & ra_{h2} & \dots & ra_{hq} \end{bmatrix};$$

     indichiamo in breve questa operazione con

$$R_h := rR_h;$$

   - sommare alla $k-$ma riga la $h-$ma riga (dove $k \neq h$) moltiplicata per un numero reale r; questa operazione trasforma la $k-$ma riga nella riga

$$\begin{bmatrix} a_{k1} + ra_{h1} & a_{k2} + ra_{h2} & \dots & a_{kq} + ra_{hq} \end{bmatrix};$$

     indichiamo in breve questa operazione con

$$R_k := R_k + rR_h;$$

   - scambiare la $h-$ma equazione e la $k-$ma equazione; indichiamo in breve questa operazione con

$$R_k := R_h, \qquad R_h := R_k.$$

5. Una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix};$$

si dice "triangolare (superiore)"; se inoltre tutti gli elementi diagonali sono non nulli, cioe'

$$a_{ii} \neq 0, \quad \forall i,$$

la matrice si dice "triangolare non degenere."

Il processo di triangolarizzazione prende in entrata una matrice con p righe e q colonne e, sotto una certe condizioni, restituisce in uscita una matrice con p righe e q colonne triangolare nondegenere. I passi del processo sono le operazioni elementari sulle righe.

Informalmente, il processo di triangolarizzazione si puo' descrivere come segue. Sia data uuna matrice con p righe e q colonne

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix},$$

ed indichiamo con $R_1, R_2, R_3, \dots$ le sue righe.

Se almeno uno fra $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots$ e' $\neq 0$, allora rendiamo $a_{11} \neq 0$ scambiando due righe, e annulliamo $a_{21}, a_{31}, \dots$ applicando le operazioni elementari

$$R_2 = R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1, \quad R_3 = R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1, \quad \dots;$$

otteniamo cosi' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2q} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Se almeno uno fra $a'_{22}, a'_{32}, \dots$ e' $\neq 0$, allora rendiamo $a'_{22} \neq 0$ e annulliamo $a'_{32}, \dots$ applicando opportune operazioni elementari; otteniamo cosi' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2q} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Iterando, sotto certe condizioni, si giunge a una matrice triangolare non degenere.

6. **Applicazione ai sistemi lineari**

Il processo di triangolarizzazione puo' essere usato per risolvere i sistemi lineari nel modo seguente.

Dato un sistema lineare, passiamo alla corrispondente matrice; a questa matrice applichiamo il processo di triangolarizzazione che, sotto certe condizioni, fornisce una matrice triangolare nondegenere; da questa matrice passiamo al sistema corrispondente.

$$\begin{array}{ccc} sist. & \rightarrow & matr. \\ & & \downarrow \\ sist.\, tr. & \leftarrow & matr.\, tr. \end{array}$$

Il sistema ottenuto e' equivalente al sistema dato, ma piu' semplice: si puo' facilmente decidere se e' determinato, indeterminato o impossibile, e in tal caso determinarne le soluzioni.