Algebra Lineare (Matematica C.I.), 15.11.13

1. Consideriamo un sistema lineare. E' piuttosto naturale aspettarsi che

   (a) se il numero delle equazioni e' minore del numero delle incognite, allora il sistema e' indeterminato;

   (b) se il numero delle equazioni e' uguale numero delle incognite, allora il sistema e' determinato;

   (c) se il numero delle equazioni e' maggiore del numero delle incognite, allora il sistema e' impossibile.

   Non e' detto che cio' che ci si aspetta accada sempre, ma in un qualche senso dovrebbe accadere piu' spesso. Nei punti seguenti diamo un senso un po' piu' preciso a queste affermazioni. Ci limitiamo alla seconda.

2. Consideriamo la totalita' delle equazioni lineari in una incognita x

   $$ax = b$$

   dove a e b variano in $\mathbb{R}$. Sappiamo che le equazioni determinate sono caratterizzate dalla condizione $a \neq 0$.

   Associamo ora a ciascuna equazione lineare in x un punto nel piano, precisamente associamo alla equazione

   $$ax = b$$

   il punto (a, b). Osserviamo che i punti che corrispondono alle equazioni determinate sono tutti i punti del piano tranne quelli della retta $a = 0$.

   Possiamo allora dire che ci aspettiamo che una equazione lineare in una incognita presa a caso sia determinata, cosi' come ci aspettiamo che un punto preso a caso nel piano non stia su una retta prefissata.

3. Consideriamo la totalita' dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite x, y

   $$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

   dove a, b, p, c, d, q variano in $\mathbb{R}$. Osserviamo che sotto la condizione $a \neq 0$ possiamo eliminare la x dalla seconda equazione sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per $-c/a$; otteniamo il sistema

   $$\begin{cases} ax + & by & = & p \\ & (d - (c/a)b)y & = & q - (c/a)p \end{cases}$$

   Ora, sotto l'ulteriore condizione

   $$d - (c/a)b \neq 0, \quad cioe' \quad (ad - cb)/a \neq 0, \quad cioe' \quad ad - cb \neq 0,$$

si ha che il sistema e' determinato. Con un'analisi un po' piu' accurata si mostra che il sistema dato e' determinato se e solo se vale la condizione

$$ad - cb \neq 0.$$

Associamo ora a ciascun sistema lineare di due equazioni in due incognite x, y un punto nello spazio a sei dimensioni, precisamente associamo al sistema

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

il punto (a, b, p, c, d, q). Osserviamo che alle equazioni determinate corrispondono tutti i punti dello spazio a sei dimensioni tranne quelli che sono soluzioni dell'equazione $ad - cb = 0$. Ora, cosi' come le soluzioni di una equazione polinomiale in due incognite costituiscono un sottinsieme "trascurabile" di $\mathbb{R}^2$, si ha che le soluzioni di una equazione polinomiale in sei incognite costituiscono un sottinsieme "trascurabile" di $\mathbb{R}^6$.

4. Fissati un numero intero positivo n, consideriamo la totalita' dei sistemi lineari di n equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

dove gli $n(n+1)$ parametri a_{ij}, b_i variano in $\mathbb{R}$. Si puo' provare che esiste una polinomio $\det(a_{ij})$, detto "determinate" della matrice dei coefficienti a_{ij}, tale che i sistemi determinati siano caratterizzati dalla disequazione

$$\det(a_{ij}) \neq 0.$$

Le soluzioni di una equazione polinomiale $\det(a_{ij}) = 0$ costituiscono un sottinsieme "trascurabile" di $\mathbb{R}^{n(n+1)}$.

5. **Matrici a scala.**

Data una riga $R = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$ di numeri reali non tutti nulli, il primo elemento non nullo di R si dice *pivot* di R. Cosi', il pivot di R compare come $j-$mo elemento di R se

$$a_1 = \ldots = a_{j-1} = 0 \quad e \quad a_j \neq 0.$$

Una matrice nella quale il pivot della prima riga compare prima del pivot della seconda riga, che a sua volta compare prima del pivot della terza riga, ... e le eventuali righe nulle vengono per ultime, si dice *matrice a scala*.

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questa matrice, e nelle seguenti, il simbolo $\diamond$ indica un numero non nullo, il simbolo $*$ indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo' indicare numeri diversi.

Le matrici a scala con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & \diamond \end{bmatrix}$$

6. **Algoritmo di Gauss.**

L'algoritmo di Gauss prende in entrata una qualsiasi matrice di m righe ed n colonne e restituisce in uscita una matrice a scala con m righe ed n colonne. I passi elementari dell'algoritmo sono le seguenti operazioni elementari sulle righe:

- sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga;
- scambiare due righe.

L'algoritmo di Gauss e' un perfezionamento del processo di triangolarizzazione, e funziona sempre senza eccezioni. Informalmente, il primo passo dell'algoritmo fa in modo che il pivot della prima riga compaia prima dei pivot delle righe dalla seconda in poi, il secondo passo dell'algoritmo fa in modo che il pivot della seconda riga compaia prima dei pivot delle righe dalla terza in poi, ...

7. **Applicazione ai sistemi lineari**

Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 12x_5 = 23 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 25x_4 + 24x_5 = 97 \\ 8x_1 + 27x_2 + 5x_3 + 125x_4 + 18x_5 = 437 \end{cases}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, cui corrisponde la matrice

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 12 & 23 \\ 4 & 9 & 7 & 25 & 24 & 97 \\ 8 & 27 & 5 & 125 & 18 & 437 \end{array}\right].$$

Applichiamo a questa matrice l'algoritmo di Gauss.

Facciamo in modo che il pivot della prima riga compaia prima dei pivot delle righe seguenti applicando le operazioni elementari

$R_2 = R_2 - 2R_1, \quad R_3 = R_3 - 4R_1, \quad R_4 = R_4 - 8R_1,$

ottenendo cosi'

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & -5 & 21 & 4 & 73 \\ 0 & 19 & -19 & 117 & -22 & 389 \end{array}\right].$$

Facciamo in modo che il pivot della seconda riga compaia prima dei pivot delle righe seguenti applicando le operazioni elementari

$R_3 = R_3 - 5R_2, \quad R_4 = R_4 - 19R_2,$

ottenendo cosi'

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & -60 & 180 \end{array}\right].$$

Facciamo in modo che il pivot della terza riga compaia prima del pivot della quarta riga applicando l'operazione elementare

$R_4 = R_4 - 10R_3,$

ottenendo cosi' la matrice a scala

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & x_4+ & 5x_5 & = & 6 \\ & x_2- & x_3+ & 3x_4+ & 2x_5 & = & 11 \\ & & & 6x_4- & 6x_5 & = & 18 \end{array}\right. ,$$

che e' equivalente al sistema dato.

Possiamo risolvere il sistema nel modo seguente: dalla terza equazione ricaviamo x_4 in funzione di x_5, nella seconda equazione sostituiamo a x_4 la sua espressione e ricaviamo x_2 in funzione di x_3, x_5, nella prima equazione sostituiamo a x_2 e x_4 le loro espressioni e ricaviamo x_1 in funzione di x_3, x_5, ottenendo cosi' una soluzione del tipo

$$\begin{cases} x_1 &= \textit{funzione di } x_3, x_5 \\ x_2 &= \textit{funzione di } x_3, x_5 \\ x_3 &= \textit{qualsiasi} \\ x_4 &= \textit{funzione di } x_5 \\ x_5 &= \textit{qualsiasi} \end{cases},$$

in altri termini

$$(f(p,q), g(p,q), p, h(q), q), \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

I conti possono essere agevolmente svolti ancora sulle matrici perfezionando l'algoritmo di Gauss, come vedremo nei punti seguenti.

8. **Matrici a scala ridotta.**

Una matrice a scala che soddisfi le ulteriori codizioni

ciascun pivot e' uguale a 1,

ciascun pivot e' l'unico elemento non nullo della sua colonna

si dice matrice *a scala ridotta*.

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici a scala ridotta con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In ciascuna di queste matrici, il simbolo $*$ indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo′ indicare numeri diversi.

9. **Algoritmo di Gauss-Jordan.** L′algoritmo di Gauss-Jordan prende in entrata una qualsiasi matrice di m righe ed n colonne e restituisce in uscita una matrice a scala ridotta con m righe ed n colonne. I passi elementari dell′algoritmo sono le operazioni elementari per righe:

   - sommare ad una riga un multiplo di un′altra riga;
   - scambiare due righe;
   - moltiplicare una riga per un numero reale non nullo.

   Diamo una descrizione informale dell′algoritmo. Usando le prime due operazioni elementari si trasforma la matrice data in una matrice a scala. Osserviamo che tutti gli elementi al di sotto di un pivot sono nulli. Usando la prima operazione elementare si annullano anche tutti gli elementi al di sopra di un pivot. Usando la terza operazione elementare si rendono tutti i pivot uguali a 1. La successione dei passi puo′ essere impostata in vari modi, ma l′esito finale e′ sempre lo stesso.

10. **Applicazione ai sistemi lineari**

    Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 + & 3x_3 + & x_4 + & 5x_5 & = & 6 \\ & x_2 - & x_3 + & 3x_4 + & 2x_5 & = & 11 \\ & & & 6x_4 - & 6x_5 & = & 18 \end{cases}$$

    nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, cui corrisponde la matrice a scala

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

    Applichiamo a questa matrice gli ultimi passi dell′algoritmo di Gauss-Jordan.

    Rendiamo il pivot della terza uguale a 1 applicando l′operazione elementare

    $R_3 = \frac{1}{6}R_3$,

    ottenendo cosi′

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rendiamo il pivot della terza riga unico elemento diverso da zero della sua colonna applicando le operazioni elementari

$R_2 = R_2 - 3R_3, \quad R_1 = R_1 - R_3,$

ottenendo cosi'

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rendiamo il pivot della seconda riga unico elemento diverso da zero della sua colonna applicando l'operazione elementare

$R_1 = R_1 - R_2,$

ottenendo cosi' la matrice a scala ridotta

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} x_1 + \quad 4x_3 + \quad x_5 = 1 \\ x_2 - \quad x_3 + \quad 5x_5 = 2 \\ x_4 - \quad x_5 = 3 \end{cases},$$

che e' equivalente al sistema dato.

Possiamo risolvere il sistema nel modo seguente: dalla terza equazione ricaviamo x_4 in funzione di x_5, dalla seconda equazione ricaviamo x_2 in funzione di x_3, x_5, dalla prima equazione ricaviamo x_1 in funzione di x_3, x_5, ottenendo cosi' la soluzione

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 - x_5 + 1 \\ x_2 = x_3 - 5x_5 + 2 \\ x_3 = qualsiasi \\ x_4 = x_5 + 3 \\ x_5 = qualsiasi \end{cases},$$

in altri termini

$$(1 - 4p - q,\ 2 + p - 5q,\ p,\ 3 + q,\ q), \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

11. **Descrizione generale**

Sia dato un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

di m equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$. Consideriamo la matrice completa del sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

ed applichiamo a questa matrice l'algoritmo di Gauss, ottenendo cosi' una matrice a scala per righe, che sara' del tipo

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \ldots & 0 & a'_{1j_1} & & & & & & & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \ldots & 0 & a'_{2j_2} & & & & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & & & \ldots & & & \ldots & 0 & a'_{pj_p} & \ldots \; a'_{pn} & b'_p \\ 0 & \ldots & & & \ldots & & & \ldots & 0 & 0 & \ldots \; 0 & b'_{p+1} \\ \vdots & & & & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \end{array}\right],$$

con $a'_{1j_1}, a'_{2j_2}, \ldots, a'_{pj_p} \neq 0$. A questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} a'_{1j_1}x_{j_1} + \ldots \qquad\qquad\qquad +a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ \qquad a'_{2j_2}x_{j_2} + \ldots \qquad\quad +a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & \vdots & \\ \qquad\qquad a'_{pj_p}x_{j_p} + \ldots +a'_{pn}x_n & = & b'_p \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = & b'_{p+1} \end{array}\right.,$$

che e' equivalente al sistema dato.

- Se $b'_{p+1} \neq 0$, il sistema e' impossibile.
- Se $b'_{p+1} = 0$, allora il sistema ha soluzioni; precisamente,
  - per $p = n$, il sistema e' determinato;
  - per $p < n$ possiamo risolvere il sistema rispetto alle incognite $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}$, riguardando le altre incognite come parametri, e il sistema e' indeterminato con soluzioni che dipendono da $n - p$ parametri liberi.

12. **Sistemi lineari con meno equazioni che incognite.**

Dalle considerazioni del punto precedente si ottiene la seguente

Proposizione 1 *Un sistema lineare di m equazioni in n incognite con $m < n$ non e' mai determinato: e' impossibile, oppure e' indeterminato con soluzioni che dipendono da almeno $n - m$ parametri liberi.*

Dim. Con riferimento alla discussione svolta al punto precedente, per il numero p numero dei pivot si ha che $p \leq m$ (sostanzialmente per definizione di pivot) e $m < n$ per ipotesi; dunque $p < n$. Dalla discussione precedente segue allora che il sistema e' impossibile, o indeterminato con soluzioni che dipendono da $n - p$ parametri liberi; chiaramente si ha $n - p \geq n - m$. $\square$.

Un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$, nel quale tutti i termini noti siano nulli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

si dice *omogeneo*. Un tale sistema possiede sempre almeno una soluzione: la ennupla $(0, 0, \ldots, 0)$ che viene detta "soluzione banale" del sistema. Vale dunque la seguente

Proposizione 2 *Un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite con $m < n$ e' sempre indeterminato, con soluzioni che dipendono da almeno $n - m$ parametri liberi.*