

## Algebra lineare (Matematica C.I.) - 19.11.13

### Algebra delle matrici - Moltiplicazione

#### 1. Ennuple, righe e colonne. Notazione

In algebra lineare giocano un ruolo importante le coppie, terne, ...,  $n$ -ple ordinate di numeri reali; così come una coppia ordinata di numeri reali può essere pensata come un punto del piano, e una terna ordinata di numeri reali può essere pensata come un punto dello spazio, anche una  $n$ -pla ordinata  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  di numeri reali  $a_i \in \mathbb{R}$  viene pensata come un'unica entità, ed indicata con un unico simbolo:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (1)$$

Si dice che  $a_1, a_2, \dots$  sono la prima, seconda, ... componente di  $a$ . Si scrive anche, più brevemente,

$$a = (a_j)_{j=1, \dots, n}.$$

Di regola, indicheremo le  $n$ -ple ordinate con lettere minuscole e, come fatto sopra, se indicheremo una  $n$ -pla con una certa lettera, allora indicheremo le sue componenti con quella stessa lettera con indici.

Per ciascun intero positivo  $n$ , l'insieme delle  $n$ -ple ordinate di numeri reali viene indicato con

$$\mathbb{R}^n.$$

Una  $n$ -pla ordinata può essere identificata una matrice riga o con una matrice colonna. Se indicheremo una  $n$ -pla con una certa lettera, allora indicheremo la corrispondente matrice colonna con la stessa lettera, e la corrispondente matrice riga con la stessa lettera con un apice.

Così, per la  $n$ -pla (1) scriveremo

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad e \quad a' = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n].$$

#### 2. Prodotto di una riga per una colonna

Definiamo il prodotto di una riga  $a'$  di numeri reali per una colonna  $b$  di numeri reali, aventi lo stesso numero di componenti, come il numero reale ottenuto moltiplicando ciascuna componente di  $a'$  per la corrispondente componente di  $b$ , e poi sommando. Ad esempio

$$[1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

In generale, si ha

$$\begin{aligned} a'b &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \\ &= \sum_{j=1}^n a_jb_j. \end{aligned}$$

La moltiplicazione di una riga per una colonna aventi diversi numeri di componenti non viene definita.

Questa operazione puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente le equazioni lineari. Ad esempio, l'equazione

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

puo' essere scritta come

$$[2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5.$$

In generale, l'equazione lineare

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

puo' essere scritta come

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

e rappresentata sinteticamente come

$$a'x = b,$$

dove  $a'$  e' la riga dei coefficienti e  $x$  e' la colonna delle incognite.

### 3. Matrici. Notazione

Una tabella di numeri reali viene detta matrice; ciascuna matrice viene pensata come un'unica entita' e viene indicata con una lettera maiuscola; se una matrice  $A$  possiede  $m$  righe ed  $n$  colonne si dice che  $A$  ha *tipo*  $m \times n$ ; per indicare che la matrice  $A$  ha tipo  $m \times n$  si usa scrivere

$$\underset{m \times n}{A}.$$

Il numero reale che compare in  $A$  nella riga  $i$ -ma e colonna  $j$ -ma viene detto *elemento di posto*  $(i, j)$  di  $A$ .

La generica matrice  $A$  di tipo  $m \times n$  viene rappresentata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

oppure, piu' brevemente,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

o  $A = [a_{ij}]$  quando il tipo e' chiaro dal contesto. Si noti che  $i$  e  $j$  non hanno alcun particolare significato, potrebbero essere sostituiti da altri due simboli, come  $h$  e  $k$ .

Per ogni coppia di interi positivi  $m, n$ , l'insieme delle matrici di numeri reali di tipo  $m \times n$  viene indicato con

$$\mathbb{R}^{m \times n}.$$

Dunque, l'insieme delle colonne di  $m$  numeri reali viene indicato con  $\mathbb{R}^{m \cdot 1}$ , e l'insieme delle righe di  $n$  numeri reali viene indicato con  $\mathbb{R}^{1 \cdot n}$ .

Noi useremo spesso una notazione un po' diversa, suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo come Matlab, o Octave.

Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso  $A$ , per indicare una matrice, si usa il simbolo  $A_{ij}$  per indicare l'elemento di posto  $(i, j)$  in  $A$ ; si usa il simbolo  $A_{i*}$  per indicare la riga  $i$ -ma di  $A$ , e si usa il simbolo  $A_{*j}$  per indicare la colonna  $j$ -ma di  $A$ .

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$A_{23} = 7, \quad A_{2*} = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8], \quad A_{*3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

#### 4. Prodotto di matrici

Se il numero delle colonne di una matrice  $A$  e' uguale al numero delle righe di una matrice  $B$ , allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di  $A$  per ciascuna colonna di  $B$ , ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo cosi'

una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di  $A$  per  $B$ , ed indicata con  $AB$ .

Ad esempio, si ha

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 & 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{bmatrix}$$

In simboli, il prodotto di una matrice  $A$  di tipo  $m \times n$  per una matrice  $B$  di tipo  $n \times p$  e' la matrice  $AB$  di tipo  $m \times p$

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & AB \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \end{matrix}$$

data dalla tabella dei prodotti delle  $m$  righe di  $A$  per le  $p$  colonne di  $B$  : l'elemento di posto  $(i, j)$  in  $AB$  e' dato dal prodotto della riga  $i$ -ma di  $A$  per la colonna  $j$ -ma di  $B$  :

$$(AB)_{ij} = A_{i*}B_{*j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Con riferimento agli elementi, si ha

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= A_{i*}B_{*j} \\ &= [A_{i1} \ A_{i2} \ \dots \ A_{in}] \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix} \\ &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj} \\ &= \sum_{h=1}^n A_{ih}B_{hj}. \end{aligned}$$

La moltiplicazione di matrici estende la moltiplicazione dei numeri reali, nel senso che le matrici di tipo  $1 \cdot 1$  sono numeri reali, e la moltiplicazione di matrici di tipo  $1 \cdot 1$  e' la moltiplicazione di numeri reali.

## 5. Rappresentazione sintetica di sistemi lineari

La moltiplicazione di matrici puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente i sistemi lineari. Ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 = 9 \\ 6x_1 + 7x_2 = 10 \end{cases},$$

puo' essere riscritto come

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix},$$

e il primo membro puo' essere fattorizzato nel prodotto della matrice dei coefficienti per la colonna delle incognite:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

In generale, il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

puo' essere scritto come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

e rappresentato sinteticamente come

$$Ax = b,$$

dove  $A$  e' la matrice di tipo  $m \times n$  dei coefficienti,  $x$  e' la colonna delle  $n$  incognite, e  $b$  e' la colonna degli  $m$  termini noti.

## 6. Matrici unita'

Le matrici quadrate che hanno 1 sulla diagonale e 0 altrove svolgono il ruolo del numero 1, e per questa ragione vengono dette *matrici unita'*. Esplicitamente, queste matrici sono

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots;$$

la matrice  $I_n$  unita' di ordine  $n$  e' la matrice quadrata di ordine  $n$  data da

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

La proprieta' di queste matrici e' che

$$I_m A = A = A I_n,$$

per ogni  $m, n$  e per ogni matrice  $A$  di tipo  $m \times n$ . Verifichiamo la prima parte di questa proprieta' per  $m = 2$  e  $n = 3$ . Per ogni matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

di tipo  $2 \cdot 3$  si ha

$$\begin{aligned} I_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot d & 1 \cdot b + 0 \cdot e & 1 \cdot c + 0 \cdot f \\ 0 \cdot a + 1 \cdot d & 0 \cdot b + 1 \cdot e & 0 \cdot c + 1 \cdot f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

In generale, la proprieta' si puo' mostrare come segue. Da una parte si ha

$$(I_m A)_{ij} = \sum_{h=1, \dots, m} (I_m)_{ih} A_{hj} = (I_m)_{ii} A_{ij} = A_{ij},$$

per ogni  $i$  e  $j$ ; dunque  $I_m A = A$ . La dimostrazione dall'altra parte e' analoga.

## 7. Associativita'

Date tre matrici  $A, B, C$  di tipi rispettivamente  $m \times n, n \times p, p \times q$ , abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sara' di tipo  $m \times q$ :

$$(AB)C, \quad A(BC).$$

Ad esempio, per  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = [4 \ 5]$ , e  $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ , si ha

$$(AB)C = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [4 \ 5] \right) \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 \\ 118 \\ 177 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left( [4 \ 5] \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [59] = \begin{bmatrix} 59 \\ 118 \\ 177 \end{bmatrix}.$$

Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprietà associativa: comunque siano date tre matrici  $A, B, C$  di tipi rispettivamente  $m \times n, n \times p, p \times q$ , si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Questa affermazione si può dimostrare come segue. Da un lato si ha

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{h=1}^p (AB)_{ih} C_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^p \left[ \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kh} \right] C_{hj} = \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kh} C_{hj}; \end{aligned}$$

dall'altro si ha

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_{h=1}^n A_{ih} (BC)_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^n A_{ih} \left[ \sum_{k=1}^p B_{hk} C_{kj} \right] = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^p A_{ih} B_{hk} C_{kj}; \end{aligned}$$

si osservi che scambiando l'ordine delle sommatorie e rinominando gli indici di sommatoria un'espressione si trasforma nell'altra.

Potremo così scrivere un prodotto di più matrici senza usare parentesi. Gli elementi

$$(ABC)_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, q,$$

della matrice  $ABC$  sono dati da

$$(ABC)_{ij} = \sum_{\substack{h=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}} A_{ih} B_{hk} C_{kj}.$$

## 8. Noncommutatività

Sappiamo che il prodotto di due numeri reali non cambia invertendo l'ordine dei fattori, cioè la moltiplicazione di numeri reali possiede la proprietà commutativa. Questa proprietà non vale per la moltiplicazione di matrici, anzi in generale ci si aspetta che

$$AB \neq BA.$$

Puo' succedere che un prodotto esista e che l'altro prodotto non esista:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [4 \ 5] = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

e

$$[4 \ 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ non esiste.}$$

Un esempio in cui i due prodotti sono definiti ma diversi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 9. Potenze

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Per ogni numero naturale  $p = 0, 1, 2, \dots$ , la potenza  $p$ -ma di  $A$  e' definita da

$$A^p = \begin{cases} A A \cdots A & (p \text{ volte}) \text{ per } p > 0 \\ I_n & \text{per } p = 0 \end{cases}.$$

Valgono le proprietà

$$A^p A^q = A^{p+q},$$

$$(A^p)^q = A^{pq},$$

per ogni matrice quadrata  $A$ .

La proprietà  $(AB)^p = A^p B^p$  in generale non vale. La proprietà vale sotto al condizione che  $A$  e  $B$  siano permutabili:

$$(AB)^p = A^p B^p \quad (A, B \text{ tali che } AB = BA)$$

Ad esempio, si ha

$$(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2 B^2 \quad (A, B \text{ tali che } AB = BA).$$