Algebra lineare (Matematica C.I.) 22.11.13

1. **Problema**

   Siano C_1 e C_2 due citta'. Consideriamo, a partire da un certo anno i numeri dei residenti in C_1 e C_2. Supponiamo che per un certo periodo, nel passaggio da ciascun anno al'anno successivo i numeri dei residenti in C_1 e C_2 varino secondo la seguente legge:

   - l' 80% dei residenti in C_1 mantiene la residenza in C_1, e il restante 20% dei residenti in C_1 prende residenza in C_2;
   - il 30% dei residenti in C_2 prende residenza in C_1, e il restante 70% dei residenti in C_2 mantiene la residenza in C_2;

   Ci chiediamo come evolvera' nel tempo la distribuzione degli abitanti nelle due citta'.

Indichiamo con $x_1(t)$ il numero dei residenti in C_1 all'anno t, e con $x_2(t)$ il numero dei residenti in C_2 all'anno t, per ogni $t = 0, 1, 2, \ldots$

La legge di variazione si puo' allora esprimere nella forma

$$\begin{cases} x_1(t+1) & = & 0.8x_1(t) + 0.3x_2(t) \\ x_2(t+1) & = & 0.2x_1(t) + 0.7x_2(t) \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Usando il formalismo matriciale, possiamo riscrivere questa legge nella forma

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sinteticamente,

$$x(t+1) = A\, x(t).$$

Osserviamo che

$x(1) = A\, x(0)$

$x(2) = A\, x(1) = A^2\, x(0)$

$\vdots$

$x(t) = A\, x(t-1) = A^t\, x(0)$

$\vdots$

Il problema di determinare l'evoluzione della distribuzione degli abitanti nelle due citta' si traduce nel problema di dare una formula per le potenze della matrice, e magari studiarne il limite quando l'esponente tende a $+\infty$.

Matrici diagonali

1. **Matrici diagonali**

   Una matrice quadrata, come

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

   nella quale tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, viene detta *matrice diagonale.* Possiamo rappresentare una qualsiasi matrice diagonale di ordine n come

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

   scrivendo solo gli elementi sulla diagonale.

   Si verifica che premoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna riga r_i' di A per il corrispondente elemento diagonale a_i di D :

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} r_1' \\ \hline r_2' \\ \hline \vdots \\ \hline r_n' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_1 r_1' \\ \hline a_2 r_2' \\ \hline \vdots \\ \hline a_n r_n' \end{array}\right]$$

   Si verifica che postmoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna colonna c_i di A per il corrispondente elemento diagonale a_i di D :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 c_1 & a_2 c_2 & \dots & a_n c_n \end{array}\right].$$

   In particolare, il prodotto di due matrici diagonali e′ una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice prodotto sono i prodotti degli elementi corrispondenti delle due matrici fattori:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{bmatrix}$$

Piu' in particolare, la potenza $t-$ma di una matrice diagonale e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice potenza $t-$ma sono le potenze $t-$me degli elementi della matrice:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^q = \begin{bmatrix} a_1^q & & & \\ & a_2^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^q \end{bmatrix}$$

2. **Osservazione sul prodotto di matrici.**

   Per definizione, il prodotto di una matrice di tipo $m \times n$ per una matrice di tipo $n \times p$ e' la tabella dei prodotti delle m righe della prima matrice per le p colonne della seconda matrice

$$\left[\begin{array}{c} r_1' \\ \hline r_2' \\ \hline \vdots \\ \hline r_m' \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{array}\right] = \begin{bmatrix} r_1'c_1 & r_1'c_2 & \dots & r_1'c_p \\ r_2'c_1 & r_2'c_2 & \dots & r_2'c_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_m'c_1 & r_m'c_2 & \dots & r_m'c_p \end{bmatrix}.$$

   Indicata con A la prima matrice e con B la seconda matrice, si puo' osservare che le varie colonne della matrice prodotto possono essere viste come i prodotti della matrice A per le varie colonne della seconda matrice:

$$A \left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Ac_1 & Ac_2 & \dots & Ac_p \end{array}\right],$$

   cosi' come le varie righe della matrice prodotto possono essere viste come i prodotti delle varie righe della prima matrice per la matrice B :

$$\left[\begin{array}{c} r_1' \\ \hline r_2' \\ \hline \vdots \\ \hline r_m' \end{array}\right] B = \left[\begin{array}{c} r_1'B \\ \hline r_2'B \\ \hline \vdots \\ \hline r_m'B \end{array}\right].$$

Diagonalizzazione, Autovettori e autovalori.

1. **Esempio**

   Mostriamo ora come il calcolo delle potenze della matrice non diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

possa essere ricondotto al calcolo delle potenze di una opportuna matrice diagonale.
L'idea e' di rigurdare la matrice A come una funzione

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \mapsto Ax \in \mathbb{R}^2.$$

Ci sono delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice: una e' $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, in quanto

$$Au = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = u;$$

un'altra e' $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, in quanto

$$Av = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5\, v.$$

In entrambi i casi, A agisce come la moltiplicazione per un numero reale:

$$Au = 1\, u, \qquad Av = 0.5\, v.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} A \left[\ u \mid v\ \right] &= \left[\ Au \mid Av\ \right] \\ &= \left[\quad u \mid 0.5\, v\ \right] \\ &= \left[\ u \mid v\ \right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto

$$P = \left[\ u \mid v\ \right], \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$

possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Ora, capita che la matrice

$$P = [\ u \mid v\ ] = \left[\begin{array}{r|r} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$$

possiede inversa. Dunque possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$\begin{array}{rcl} A & = & PDP^{-1} \\ A^2 & = & PDP^{-1}PDP^{-1} = PDI_2DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ A^3 & = & PDP^{-1}PD^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\ \vdots & & \\ A^t & = & PD^tP^{-1} \\ \vdots & & \end{array}$$

Cosi' abbiamo

$$\begin{aligned} A^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & (0.5)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= ... \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} lim_{t\to\infty} A^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. **Caso generale**

   In generale, data una matrice A quadrata di ordine n, possiamo cercare delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice ...

   Definizione *Siano A una matrice quadrata di ordine n, $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$; se*

$$Av = \lambda v,$$

allora si dice che v e' un autovettore di A, e che λ e' un autovalore di A, associato a v.

Se la matrice A possiede n autovettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, con rispettivi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, cioe' se

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad \ldots \quad Av_n = \lambda_n v_n,$$

allora si ha

$$\begin{aligned} A \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \quad v_n \,\right] &= \left[\, Av_1 \mid Av_2 \mid \ldots \quad Av_n \,\right] \\ &= \left[\, \lambda_1 v_1 \mid \lambda_2 v_2 \mid \ldots \quad \lambda_n v_n \,\right] \\ &= \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \quad v_n \,\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Indichiamo con P

$$P = \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \quad v_n \,\right]$$

la matrice quadrata di ordine n avente come colonne gli n autovettori v_i, ed indichiamo con D

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

la matrice diagonale di ordine n con elementi diagonali i corrispondenti autovalori λ_i.

Cosi' possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Se capita che la matrice

$$P = \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \quad v_n \,\right]$$

avente come colonne gli n autovettori possiede inversa, allora possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$A^t = PD^tP^{-1}.$$

3. **Questioni aperte**

   Viene naturale porsi le seguenti domande:

   (a) una matrice possiede sempre qualche autovettore? se si, ne possiede abbastanza per costruire una matrice invertibile?

   (b) come si determinano autovettori ed autovalori?

   Risponderemo nelle prossime lezioni.