Algebra lineare (Matematica C.I.) 26.11.13

1. **Somma di matrici.**

   Siano m ed n due interi positivi fissati. Date due matrici A, B di tipo $m \times n$, sommando a ciascun elemento di A il corrispondente elemento di B, si ottiene una nuova matrice di tipo $m \times n$, detta matrice somma di A e B ed indicata con $A + B$. Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 12 \\ 21 & 38 \end{bmatrix}.$$

   In simboli, la matrice $A + B$ e' definita elemento per elemento ponendo

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

   La somma di due matrici di tipi diversi non e' definita.

   L'addizione di matrici e' un'operazione associativa e commutativa. La matrice di tipo $m \times n$ avente tutti gli elementi nulli viene detta matrice nulla ed indicata con $\underset{m \times n}{0}$. Questa matrice e' caratterizzata dalla proprieta'

$$A + \underset{m \times n}{0} = A = \underset{m \times n}{0} + A, \qquad (\textit{per ogni } A \in R^{m \times n}).$$

   Per ogni matrice A di tipo $m \times n$, prendendo di ciascun elemento di A il suo opposto, si ottiene una nuova matrice di tipo $m \times n$, detta matrice opposta di A ed indicata con $-A$. In simboli, la matrice $-A$ e' definita elemento per elemento ponendo

$$(-A)_{ij} = -A_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

   Questa matrice e' caratterizzata dalla proprieta'

$$A + (-A) = \underset{m \times n}{0} = (-A) + A.$$

   Nel caso $m = n = 1$ abbiamo l'usuale somma di numeri reali.

2. **Prodotto di una matrice per uno scalare**

   Data una matrice A di tipo $m \times n$, e dato uno scalare $r \in \mathbb{R}$, moltiplicando r per ciascun elemento di A si ottiene una nuova matrice di tipo $m \times n$, detta matrice prodotto dello scalare r per la matrice A, ed indicata con rA. In simboli, la matrice rA e' definita elemento per elemento da

$$(rA)_{ij} = rA_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$$

In modo analogo si definisce la matrice prodotto della matrice A per lo scalare r, indicata con Ar. Chiaramente si ha

$$rA = Ar.$$

Esempio:

$$7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} 7.$$

La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare r puo' essere realizzata come lamoltiplicazione a sinistra oppure come la moltiplicazione a destra di A per opportune matrici. Ad esempio, si ha

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

In generale, la moltiplicazione di una matrice A di tipo $m \times n$ per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione di A per la matrice rI_m oppure come la postmoltiplicazione di A per la matrice rI_n :

$$rA = (rI_m)A = A(rI_n).$$

Per questa ragione, le matrici rI vengono dette *matrici scalari*.

3. **Proprieta'. Combinazioni lineari**

Le operazioni di somma di matrici, di moltiplicazione di matrici per scalari reali, di somma di numeri reali e di prodotto di numeri reali sono legate dalle seguenti proprieta'

$$\begin{aligned} r(A+B) &= rA + rB \\ (r+s)A &= rA + sA \\ (rs)A &= r(sA) \\ 1A &= A \end{aligned}$$

per ogni A e B matrici di uno stesso tipo ed ogni r, s scalari in $\mathbb{R}$.

Date $A_1, A_2, \ldots, A_p$ matrici di uno stesso tipo, l'espressione piu' generale che possiamo ottenere con le operazioni di somma di matrici e di moltiplicazione di matrici per scalari e' del tipo

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_p A_p$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sono scalari in $\mathbb{R}$.

Questa espressione viene detta *combinazione lineare* delle matrici $A_1, A_2, \ldots, A_p$ con coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Si noti che: prendendo tutti i coefficienti nulli si ottiene la matrice nulla 0; prendendo l'$i-$mo coefficiente uguale a 1 e tutti gli altri coefficienti uguali a 0 si ottiene una la $i-$ma matrice A_i; prendendo l'$i-$mo e il $j-$mo coefficiente uguali a 1 e tutti gli altri coefficienti uguali a 0 si ottiene una la somma della $i-$ma e della $j-$ma matrice $A_i + A_j$.

La somma di due combinazioni lineari delle matrici $A_1, \ldots, A_p$ e il prodotto di una combinazione lineare delle matrici $A_1, \ldots, A_p$ per uno scalare sono ancora combinazioni lineari delle matrici $A_1, \ldots, A_p$.

4. **Base canonica di R^n.**

Consideriamo il generico vettore $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Usando le operazioni di somma di vettori e di prodotto di vettori per scalari possiamo scomporre il vettore a nella combinazione lineare

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_2$$

dei vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con coefficienti le componenti a_1 ed a_2 di a.

In generale, nello spazio $\mathbb{R}^n$ consideriamo i vettori che hanno una componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a zero:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'insieme di questi vettori si dice *base canonica* di $\mathbb{R}^n$. Ogni vettore $a = [a_i]_1^n$ di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in un ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$, e i coefficienti sono le componenti di a :

$$a = e_1 a_1 + e_2 a_2 + \cdots + e_n a_n.$$

5. **Prodotto di matrici e combinazioni lineari di vettori. Sistemi.**

Consideriamo in $\mathbb{R}^m$ un vettore colonna le cui commponenti siano polinomi di primo grado in n variabili $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix};$$

possiamo scrivere questo vettore come il prodotto della matrice di tipo $m \times n$ dei moltiplicatori per il vettore colonna delle n variabili

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

e possiamo scriverlo come la combinazione lineare delle n colonne dei moltiplicatori con coefficienti le n variabili

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n.$$

Da cio' segue in particolare l'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n,$$

che puo' essere letta dicendo che

> *il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per un vettore colonna x ad n componenti e' uguale alla combinazione lineare delle n colonne della matrice A con coefficienti le n componenti del vettore x.*

Da queste considerazioni segue in particolare che un sistema di m equazioni in n incognite $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

si puo' scrivere come

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono le colonne dei coefficienti delle incognite $x_1, \dots, x_n$ e b e' la colonna dei termini noti.

6. **Proprieta' distributive**

L'operazione di moltiplicazione di matrici possiede le proprieta' distributive sinistra e destra rispetto all'addizione di matrici:

$$\begin{aligned} (A+B)C &= AC+BC \\ B(C+D) &= BC+BD \end{aligned}$$

per ogni A, B matrici di tipo $m \times n$ e C, D matrici di tipo $n \times p$.

Le operazioni di prodotto di matrici e di prodotto di uno scalare per una matrice sono legate dalla proprieta'

$$r(PQ) = (rP)Q = P(rQ)$$

per ogni P, Q matrici moltiplicabili ed ogni scalare r.

Dimostriamo la proprieta' distributiva sinistra della moltiplicazione rispetto all'addizione di matrici. Per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, p$, da un lato si ha

$$\begin{aligned} ((A+B)C)_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} (A+B)_{ih} C_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^{n} (A_{ih} + B_{ih}) C_{hj}, \end{aligned}$$

e dall'altro si ha

$$\begin{aligned} (AC+BC)_{ij} &= (AC)_{ij} + (BC)_{ij} \\ &= \sum_{h=1}^{n} A_{ih} C_{hj} + \sum_{h=1}^{n} B_{ih} C_{hj}; \end{aligned}$$

la forma finale della prima espressione si puo' trasformare nella forma finale della seconda espressione, applicando la proprieta' distributiva (della moltiplicazione rispetto all'addizione di numeri reali) a ciascun addendo e spezzando la sommatoria.

7. **Espressioni matriciali**

Il calcolo delle espressioni matriciali puo' essere sviluppato in analogia col calcolo delle usuali espressioni algebriche, ma solo fino a un certo punto. Innanzitutto sia la moltiplicazione che l'addizione di matrici non sono sempre definite, poi la moltiplicazione non possiede la proprieta' commutativa.

Cio' comporta, ad esempio, che l'identita'

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

valida per a, b variabili reali, non lo e' piu' per variabili matriciali. Infatti per A, B matrici quadrate dello stesso ordine si ha

$$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2,$$

e AB e BA in generale non si elidono.

8. **Matrice trasposta**

   Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A ed indicata con

   $$A^T.$$

   In simboli, si ha:

   $$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m.$$

   Ad esempio, si ha

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

   Una matrice (quadrata) che coincide con la propria trasposta si dice "matrice simmetrica". Le matrici simmetriche quadrate del secondo ordine e del terzo ordine sono del tipo

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

9. L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

   $\left(A^T\right)^T = A,$

   per ogni matrice A;

   $(A + B)^T = A^T + B^T$

   per ogni coppia A, B di matrici sommabili;

   $(AB)^T = B^T A^T$

   per ogni coppia A, B di matrici moltiplicabili;

   $(rA)^T = rA^T$

   per ogni matrice A ed ogni scalare r.

   Dimostriamo la proprieta' relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

   $$(AB)^T = B^T A^T$$

   e' consistente, cioe' che le matrici ai due lati dell'uguaglianza hanno lo stesso tipo. Infatti, da un lato, la matrice AB e' definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice

$(AB)^T$ ha tipo $p \times m$; dall'altro, la matrice B^T ha tipo $p \times n$, la matrice A^T ha tipo $n \times m$, e la matrice $B^T A^T$ e' definita ed ha tipo $p \times m$.

Proviamo ora che

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = \left(B^T A^T\right)_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned}\left((AB)^T\right)_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= \sum_{h=1}^{n} A_{jh} B_{hi},\end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$\begin{aligned}\left(B^T A^T\right)_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} \left(B^T\right)_{ih} \left(A^T\right)_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^{n} B_{hi} A_{jh},\end{aligned}$$

e i due risultati sono uguali per la proprieta' commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Per finire, osserviamo che una matrice quadrata A e' invertibile se e solo se la sua trasposta A^T e' invertibile, inoltre l'inversa della trasposta e' la trasposta dell'inversa:
$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
Ad esempio, da
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix},$
segue
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}.$

Verifichiamo questa proprieta'. "A e' invertibile ed ha inversa B" significa che

$AB = I = BA$;

trasponendo ciascun membro di queste uguaglianze, otteniamo

$(AB)^T = I^T = (BA)^T$,

da cui otteniamo

$B^T A^T = I = A^T B^T$;

queste ultime uguaglianze significano che "A^T e' invertibile ed ha inversa B^T".