Algebra lineare (Matematica C.I.) 27.11.13

Determinanti

1. **Posizione del problema**

   Consideriamo i sistemi lineari di n equazioni in n incognite $x_1, \ldots, x_n$

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

   Ci chiediamo

   - sotto quali condizioni sui coefficienti a_{ij} e sui termini noti b_i il sistema e' determinato?
   - sotto queste condizioni, c'e' una formula esplicita per le soluzioni x_i in funzione degli a_{ij} e dei b_i?

2. **Due equazioni in due incognite**

   Consideriamo i sistemi di due equazioni nelle due incognite x, y

   $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

   Di seguito mostriamo che sotto una certa condizione il sistema e' determinato e sotto tale condizione diamo una formula esplicita per le soluzioni x, y.

   Sommiamo la seconda equazione moltiplicata per il coefficiente a_1 della x nella prima equazione con la prima equazione moltiplicata per l'opposto del coefficiente a_2 della x nella seconda equazione

   $$a_1(a_2x + b_2y) - a_2(a_1x + b_1y) = a_1c_2 - a_2c_1$$

   e otteniamo un'equazione nella sola y :

   $$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

   Sommiamo la prima equazione moltiplicata per il coefficiente b_2 della y nella seconda equazione con la seconda equazione moltiplicata per l'opposto del coefficiente b_1 della y nella prima equazione

   $$b_2(a_1x + b_1y) - b_1(a_2x + b_2y) = b_2c_1 - b_1c_2$$

   e ottieniamo un'equazione nella sola x

   $$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_2c_1 - b_1c_2.$$

Dunque sotto la condizione

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

possiamo ricavare univocamente le incognite

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$
$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Abbiamo cosi' provato che il sistema ha al piu' una soluzione; si verifica che questa e' davvero una soluzione.

3. **Determinante del II ordine**

Definiamo il determinante di una matrice quadrata del II ordine come il numero reale dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale discendente meno il prodotto degli elementi sulla diagonale ascendente:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

Si noti che

$$\det(I_2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Possiamo esprimere quanto trovato al punto precedente come segue.

Consideriamo il sistema nelle incognite x, y

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases};$$

se il determinante della matrice dei coefficienti del sistema e' diverso da zero

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0,$$

allora il sistema e' determinato, e le soluzioni x, y sono date da

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$$
$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$$

Possiamo scrivere il sistema nella forma

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

sinteticamente

$$ax + by = c.$$

La condizione allora diviene

$$\det \left[\, a \mid b \, \right] \neq 0$$

e le soluzioni si scrivono

$$x = \frac{\det \left[\, c \mid b \, \right]}{\det \left[\, a \mid b \, \right]}$$

$$y = \frac{\det \left[\, a \mid c \, \right]}{\det \left[\, a \mid b \, \right]}$$

4. **Esempio numerico**

   Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases}$$

   Il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = -2 \neq 0,$$

   allora il sistema e' determinato, e le incognite x, y sono date da

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}} = \frac{1 \cdot 6 - 2 \cdot 4}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}} = \frac{3 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{-2} = \frac{-1}{2}$$

5. **Proprieta'**

   Possiamo parametrizzare una matrice del secondo ordine con 4 numeri in $\mathbb{R}$, ma anche con 2 vettori colonna in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right] = \left[\, a \mid b \, \right], \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}^2.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del secondo ordine come una funzione di due variabili in $\mathbb{R}^2$:

$$\det(A) = \det\left[\ a \mid b\ \right], \qquad a, b \in \mathbb{R}^2.$$

In quest'ottica, il determinante del secondo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
\det\left[\ a+c \mid b\ \right] &= \det\left[\ a \mid b\ \right] + \det\left[\ c \mid b\ \right] \\
\det\left[\ a \mid b+c\ \right] &= \det\left[\ a \mid b\ \right] + \det\left[\ a \mid c\ \right] \\
\det\left[\ ra \mid b\ \right] &= r\det\left[\ a \mid b\ \right] \\
\det\left[\ a \mid rb\ \right] &= r\det\left[\ a \mid b\ \right] \\
\det\left[\ a \mid a\ \right] &= 0 \\
\det\left[\ b \mid a\ \right] &= -\det\left[\ a \mid b\ \right]
\end{aligned}$$

per ogni a, b, c vettori colonna in $\mathbb{R}^2$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$. Si ha inoltre

$$\det\left(A^T\right) = \det(A),$$

per ogni matrice A quadrata del II ordine.

Queste proprieta' si verifiacno facilemnte. Ad esempio, la terza proprieta' si puo' verificare cosi':

$$\begin{aligned}
\det\left[\ ra \mid b\ \right] &= \det\begin{bmatrix} ra_1 & b_1 \\ ra_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= ra_1b_2 - ra_2b_1 = r\left(a_1b_2 - a_2b_1\right) \\
&= r\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = r\det\left[\ a \mid b\ \right].
\end{aligned}$$

La penultima proprieta' si verica immediatamente:

$$\det\left[\ a \mid a\ \right] = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1a_2 - a_2a_1 = 0.$$

6. Il determinante di una matrice del secondo ordine puo' essere indicato in vari modi, ad esempio con

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad o \qquad \mathrm{D}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad o \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Analoghe notazioni si usano per matrici di ordine superiore.

7. **Determinante el III ordine**

   Il determinante di una matrice quadrata del terzo ordine puo' essere definito come il risultato comune di sei espressioni, una per ciascuna delle tre colonne e delle tre righe della matrice. Queste espressioni vengono dette *sviluppi di Laplace* del determinante.

   Ad esempio, il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

   e' dato da uno qualsiasi dei seguenti sviluppi di Laplace per colonne:

   - rispetto alla prima colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 8 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 8 - 8 \cdot 3) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = 3;$$

   - rispetto alla seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 6) + 5 \cdot (1 \cdot 8 - 7 \cdot 3) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = 3;$$

   - rispetto alla terza colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) - 6 \cdot (1 \cdot 8 - 7 \cdot 2) + 8 \cdot (1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = 3.$$

   In generale, lo svipuppo di Laplace del determinante di una matrice A secondo la $j-$ma colonna e' una somma algebrica, cioe' con segni, di tre termini: l'$i-$mo termine della somma e' il prodotto dell'$i-$mo elemento della $j-$ma colonna per il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna; il segno e' + o - secondoche $i + j$ e' pari o dispari.

   Analogamente, lo svipuppo di Laplace del determinante di A secondo la $i-$ma riga e' una somma algebrica, cioe' con segni, di tre termini: il $j-$mo termine della somma e′ il prodotto del $j-$mo elemento della $i-$ma riga per il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la $j-$ma colonna e la $i-$ma riga; il segno e′ + o - secondoche $i+j$ e′ pari o dispari.

8. Consideriamo una matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix};$$

calcoliamo il determinate usando lo sviluppo rispetto alla prima colonna

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = a_1 b_2 c_3.$$

Dunque il determinate di una matrice triangolare e′ il prodotto degli elementi diagonali. In particolare di ha

$$\det(I_3) = 1.$$

9. Lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna del determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

e′ dato da

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2.$$

Lo stesso risultato si ottiene dagli altri sviluppi di Laplace. Questa espressione si puo′ scrivere come

$$\sum_{(i_1,i_2,i_3)} sg(i_1i_2i_3)\; a_{i_1}b_{i_2}c_{i_3},$$

dove le terne (i_1, i_2, i_3) variano fra le permutazioni della terna $(1,2,3)$, e $sg(i_1i_2i_3)$ e′ il segno della permutazione (i_1, i_2, i_3).

Una parola $i_1i_2i_3$ nei simboli $1,2,3$ che contenga ciascun simbolo esttamente una volta viene detta *permutazione* dell'insieme dei simboli $1,2,3$. Una coppia di simboli $i_p i_q$ con $p < q$ e $i_p > i_q$ viene detta *inversione* della permutazione $i_1 i_2 i_3$; il segno

$sg(i_1 i_2 i_3)$

della permutazione e' $+1$ se il numero delle sue inversioni e' pari ed e' -1 se il numero delle sue inversioni e' dispari.

permutazione	*inversioni*	*numero inversioni*	*segno*
123		0	$+$
132	32	1	$-$
213	21	1	$-$
231	21, 31	2	$+$
312	31, 32	2	$+$
321	32, 31, 21	3	$-$

10. **Proprieta'**

Possiamo riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine sia come una funzione di 9 variabili in $\mathbb{R}$ che come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^3$:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a+d, & b, & c \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} d, & b, & c \end{bmatrix} \\
\det \begin{bmatrix} ra, & b, & c \end{bmatrix} &= r\det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} \\
\det \begin{bmatrix} a, & b+d, & c \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a, & d, & c \end{bmatrix} \\
\det \begin{bmatrix} a, & rb, & c \end{bmatrix} &= r\det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} \\
\det \begin{bmatrix} a, & b, & c+d \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a, & b, & d \end{bmatrix} \\
\det \begin{bmatrix} a, & b, & rc \end{bmatrix} &= r\det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} \\
\det \begin{bmatrix} a, & a, & b \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a, & b, & b \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a, & b, & a \end{bmatrix} = 0 \\
\det \begin{bmatrix} b, & a, & c \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} c, & b, & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a, & c, & b \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

per ogni a, b, c, d vettori colonna in $\mathbb{R}^3$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$. Si ha inoltre

$$\det\left(A^T\right) = \det(A),$$

per ogni matrice A quadrata del III ordine.

11. **Regola di Cramer**

Consideriamo il sistema di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases},$$

sinteticamente

$$ax + by + cz = d, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}^3.$$

Di seguito proviamo che, se il determinante della matrice dei coefficienti e' diverso da zero

$$\det\left[\begin{array}{ccc} a, & b, & c \end{array}\right] \neq 0,$$

allora il sistema e' determinato; inoltre la soluzione e' data da

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det\left[\begin{array}{ccc} d, & b, & c \end{array}\right]}{\det\left[\begin{array}{ccc} a, & b, & c \end{array}\right]} \\ y &= \frac{\det\left[\begin{array}{ccc} a, & d, & c \end{array}\right]}{\det\left[\begin{array}{ccc} a, & b, & c \end{array}\right]} \\ z &= \frac{\det\left[\begin{array}{ccc} a, & b, & d \end{array}\right]}{\det\left[\begin{array}{ccc} a, & b, & c \end{array}\right]}. \end{aligned}$$

Osserviamo che una soluzione del sistema lineare

$$ax + by + cz = d,$$

deve essere anche soluzione dell'equazione

$$\det\left[\begin{array}{ccc} ax + by + cz, & b, & c \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{ccc} d, & b, & c \end{array}\right],$$

al cui primo membro si ha

$$\begin{aligned} &\det\left[\begin{array}{ccc} ax + by + cz, & b, & c \end{array}\right] \\ &\quad = \det\left[\begin{array}{ccc} ax, & b, & c \end{array}\right] + \det\left[\begin{array}{ccc} by, & b, & c \end{array}\right] + \det\left[\begin{array}{ccc} cz, & b, & c \end{array}\right] \\ &\quad\quad = x\det\left[\begin{array}{ccc} a, & b, & c \end{array}\right] + y\det\left[\begin{array}{ccc} b, & b, & c \end{array}\right] + z\det\left[\begin{array}{ccc} c, & b, & c \end{array}\right] \\ &\quad\quad\quad = x\det\left[\begin{array}{ccc} a, & b, & c \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita x

$$x \det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} d, & b, & c \end{bmatrix};$$

in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$y \det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a, & d, & c \end{bmatrix},$$

e l'equazione nella sola incognita z

$$z \det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a, & b, & d \end{bmatrix}.$$

Se $\det \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix} \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente ciascuna delle tre incognite e il sistema ha al piu' una soluzione, quella prevista; si verifica che questa e' davvero una soluzione.