Algebra lineare (Matematica C.I.) 26.11.13

1. **Determinante di ordine n.**

   Per ogni intero positivo fissato n, il determinante di ordine n e' una certa funzione che prende in entrata matrici quadrate di ordine n e in uscita restituisce numeri reali
   $$\det_n : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto \det(A).$$
   In genere n e' chiaro dal contesto, e al posto di $\det_n$ per brevita' si scrive det. Nelle lezioni precedenti abbiamo definito i determinanti di ordine $n = 2$ e 3; ora definiamo il determinante di ordine n intero positivo qualsiasi. La definizione e' ricorsiva. Useremo il termine "linea" per significare una riga o una colonna.

   Per $n = 1$ definiamo il determinante di una matrice $[a]$ quadrata di ordine 1 ponendo
   $$\det[a] = a.$$
   Per $n > 1$, supponiamo di avere definito il determinante delle matrici quadrate di ordine $n - 1$ e definiamo il determinante delle matrici quadrate di ordine n.

   Consideriamo una matrice A quadrata di ordine n
   $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$
   Per ogni coppia (i, j), cancellando la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma della matrice A, otteniamo una matrice quadrata di ordine $n - 1$ che indichiamo con
   $$A_{\hat{i}\hat{j}}$$
   Il determinante di questa matrice, preso col suo segno o col segno cambiato secondo che $i + j$ sia pari o dispari, viene detto "complemento algebrico di posto (i, j) della matrice A."

   Definiamo il determinate di A ponendo
   $$\begin{aligned} \det(A) = &\ \textit{somma dei prodotti} \\ &\ \textit{degli elementi di una linea di } A \\ &\ \textit{per i rispettivi comlementi algebrici.} \end{aligned}$$
   Si dimostra che questa definizione e' consistente, cioe' che tutte le espressioni associate alle varie linee della matrice A danno lo stesso risultato. Queste espressioni si dicono "sviluppi di Laplace del determinante di A."

Esplicitamente, gli sviluppi di Laplace del determinate di A secondo la prima, seconda e $j-$ma colonna sono

$$A_{11}\text{det}A_{\hat{1}\hat{1}} - A_{21}\text{det}A_{\hat{2}\hat{1}} + A_{31}\text{det}A_{\hat{3}\hat{1}} - \cdots \pm A_{n1}\text{det}A_{\hat{n}\hat{1}},$$

$$-A_{12}\text{det}A_{\hat{1}\hat{2}} + A_{22}\text{det}A_{\hat{2}\hat{2}} - A_{32}\text{det}A_{\hat{3}\hat{2}} - \cdots \mp A_{n2}\text{det}A_{\hat{n}\hat{2}},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\text{det}A_{\hat{i}\hat{j}}$$

Lo sviluppo di Laplace del determinate di A secondo la $i-$ma riga e'

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\text{det}A_{\hat{i}\hat{j}}$$

Dalla definizione di determinante segue che

$$\det\left(A^T\right) = \det(A),$$

per ogni matrice A quadrata di ordine n.

2. Per una matrice triangolare si ha

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}\det\begin{bmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \ldots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Dunque, il determinante di una matrice triangolare e' il prodotto dei suoi elementi diagonali. Tale determinate e' diverso da zero se e soltanto se tutti gli elementi diagonali sono diversi da zero, cioe' la matrice triangolare e' nondegenere.

Il determinante della matrice I_n unita' di ordine n vale 1.

3. **Formula esplicita**

Si prova che il determinante della matrice $A = \left[A_{ij}\right]$ quadrata di ordine n e' dato esplicitamente da

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} sg(i_1,i_2,\ldots,i_n)\; A_{i_1 1}A_{i_2 2}\cdots A_{i_n n},$$

dove le $n-$ple $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ variano fra le permutazioni della $n-$pla $(1, 2, \ldots, n)$. Una coppia di simboli $i_p i_q$ con $p < q$ e $i_p > i_q$ viene detta *inversione* della permutazione $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$; il segno

$sg(i_1, i_2, \ldots, i_n)$

della permutazione e' $+1$ se il numero delle sue inversioni e' pari ed e' -1 se il numero delle sue inversioni e' dispari.

4. **Proprieta'**

   Possiamo riguardare il determinante di una matrice quadrata di ordine n sia come una funzione di n^2 variabili in $\mathbb{R}$ che come una funzione di n variabili in $\mathbb{R}^n$:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\left[a_1, \ \ldots, \ a_n\right], \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n.$$

   Si prova che il determinante possiede le seguenti proprieta' rispetto alle colonne:

$$\begin{aligned} \det\left[a_1 + b, \ a_2, \ \ldots, \ a_n\right] &= \det\left[a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n\right] + \det\left[b, \ a_2, \ \ldots, \ a_n\right] \\ \det\left[ra_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n\right] &= r\det\left[a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n\right] \\ \textit{analoghe proprieta'} & \quad \textit{per ogni colonna} \\ \det\left[a, \ a, \ a_3, \ \ldots, \ a_n\right] &= 0 \\ \textit{analoghe proprieta'} & \quad \textit{per ogni coppia di colonne} \\ \det\left[a_2, \ a_1, \ a_3, \ \ldots, \ a_n\right] &= -\det\left[a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots, \ a_n\right] \\ \textit{analoghe proprieta'} & \quad \textit{per ogni coppia di colonne} \end{aligned}$$

   per ogni $a_1, \ldots, a_n, b$ vettori colonna in $\mathbb{R}^n$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

   Il determinante possiede analoghe proprieta' rispetto alle colonne.

5. **Regola di Cramer**

   Consideriamo il sistema di n equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

sinteticamente

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^n.$$

Si prova che, se il determinante $\det[a_1, \ldots, a_n]$ della matrice dei coefficienti e' $\neq 0$, allora il sistema e' determinato; inoltre la soluzione e' data da

$$x_i = \frac{\det[a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n]}{\det[a_1, \ldots, a_n]} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

6. Le proprieta' del determinate rispetto alle righe ci permettono di descrivere l'effetto che ciascuna delle operazioni elementari sulle righe di una matrice ha sul determinante della matrice:

   - l'operazione di scambiare due righe ha come effetto di cambiare il segno del determinante;
   - l'operazione di moltiplicare una riga per uno scalare $r \in \mathbb{R}$ ha come effetto di moltiplicare il determinante per r;
   - l'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga lascia invariato il determinante.

   Le prime due affermazioni sono chiare. Verifichiamo la terza, nel caso delle prime due righe.

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' + sr_1' \\ \vdots \\ r_n' \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \\ \vdots \\ r_n' \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} r_1' \\ sr_1' \\ \vdots \\ r_n' \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \\ \vdots \\ r_n' \end{bmatrix} + s\det\begin{bmatrix} r_1' \\ r_1' \\ \vdots \\ r_n' \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \\ \vdots \\ r_n' \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

   Grazie a questa proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica A trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare T, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di T, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

7. Ritorniamo al problema col quale abbiamo introdotto l'argomento determinanti. Consideriamo i sistemi lineari di n equazioni in n incognite $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ci chiediamo

- sotto quali condizioni sui coefficienti a_{ij} e sui termini noti b_i il sistema e' determinato?
- sotto queste condizioni, c'e' una formula esplicita per le soluzioni x_i in funzione degli a_{ij} e dei b_i?

Abbiamo visto che, se il determinante della matrice dei coefficenti e' diverso da zero, allora il sistema e' determinato, e la regola di Cramer fornisce una formula esplicita per la soluzione.

Si puo' ricavare questo risultato dalle proprieta' del determinante rispetto alle colonne; precisamente da queste proprieta' si puo' ricavare che se il determinante della matrice dei coefficienti e' $\neq 0$ allora il sistema ha al piu' una soluzione, e che questa soluzione e' data dalla regola di Cramer; il fatto che questa sia davvero una soluzione non e' immediato.

Non abbiamo ancora visto se sia vero o meno che se il sistema e' determinato allora la matrice dei coefficienti ha determinante diverso da zero.

Teorema 1 *Per un sistema lineare $Ax = b$ di n equazioni in n incognite, le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- *il sistema $Ax = b$ e' determinato;*
- *$\det A \neq 0$.*

Dimostrazione (abbozzo) Applichiamo al sistema $Ax = b$ l'algoritmo di Gauss, e otteniamo un sistema a scala $Sx = c$; questo sistema in particolare sara' un sistema triangolare del tipo

$$\begin{cases} s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + \cdots + s_{1n}x_n = c_1 \\ \qquad\qquad s_{22}x_2 + \cdots + s_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad s_{nn}x_n = c_n \end{cases},$$

e il determinate della sua matrice dei coeffcienti e' dato da

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn}.$$

Ciascuna delle seguenti affermazioni e' equivalente alla successiva:

- il sistema $Ax = b$ e' determinato;
- il sistema $Sx = c$ e' determinato;
- $s_{nn} \neq 0$, ..., $s_{22} \neq 0$, $s_{11} \neq 0$;
- $\det S \neq 0$;
- $\det A \neq 0$.

Dunque la prima affermazione e' equivalente all'ultima. Il teorema e' dimostrato.

Dal teorema segue il

Corollario 1 *Per un sistema lineare omogeneo $Ax = 0_n$ di n equazioni in n incognite, le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- *il sistema $Ax = 0_n$ ha almeno una soluzione $x \neq 0_n$;*
- *$\det A = 0$.*

Autovalori e autovettori

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Ricordiamo che un vettore colonna non nullo $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ si dice autovettore di A se A agisce su v come la moltiplicazione per uno scalare:

   $$Av = \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

   lo scalare λ si dice autovalore di A associato all'autovettore v. Uno scalare si dice autovalore di A se e' l'autovalore associato a qualche autovettore di A.

   Osserviamo che a ciascun autovettore e' associato un solo autovalore. Infatti, se λ e μ sono entrambi autovalori associati ad uno stesso autovettore v di A, cioe' se

   $Av = \lambda v, \qquad Av = \mu v,$

   allora si ha l'uguaglianza

$\lambda v = \mu v,$

che si puo' riscrivere nella forma

$(\lambda - \mu)v = 0,$

che a sua volta, poiche' $v \neq 0$, implica

$\lambda - \mu = 0, \qquad cioe' \qquad \lambda = \mu.$

2. Riconsideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix},$$

che possiede un autovettore $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ con autovalore associato $\lambda = 1$:

$$Au = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot u;$$

e possiede un autovettore $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con autovalore associato $\lambda = 0.5$:

$$Av = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \cdot v.$$

3. Iniziamo a chiederci come si possano ricavare gli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 0.5$. Tali autovettori sono i vettori colonna $x \neq 0$ caratterizzati dalla condizione

$Ax = 0.5\, x,$

che si puo' riscrivere

$Ax - 0.5\, x = 0_2,$

o

$Ax - 0.5\, I_2 x = 0_2,$

o

$(A - 0.5\, I_2)x = 0_2.$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che si riduce alla sola equazione lineare omogenea

$0.3x_1 + 0.3x_2 = 0.$

Ora, le soluzioni di questa equazione sono del tipo

$$\begin{array}{l} x_1 = -x_2 \\ x_2 = \ qualsiasi \end{array}.$$

Questi vettori, con $x_2 \neq 0$, sono tutti e soli gli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 0.5$; in particolare, per $x_2 = 1$ ritroviamo l'autovettore v.

4. Ci chiediamo ora come si possono determinare gli autovalori di A. Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono in $\mathbb{R}^2$ dei vettori non nulli $x \neq 0$ che soddisfano la condizione

   $Ax = \lambda x,$

   che si puo' riscrivere

   $Ax - \lambda x = 0,$

   o

   $Ax - \lambda I_2 x = 0,$

   o

   $(A - \lambda I_2)x = 0.$

   Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

   $$\begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se

   $$\begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

   cioe' se e solo se λ e' soluzione dell'equazione di secondo grado

   $(0.8 - \lambda)(0.7 - \lambda) - 0.3 \cdot 0.2 = 0,$

   cioe'

   $\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.5 = 0.$

   Ora, le soluzioni di questa equazione sono

   $\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0.5.$

Abbiamo cosi' ritrovato i due autovalori della matrice A che sono associati agli autovettori u e v; possiamo inoltre affermare che A non possiede altri autovalori al di fuori di 1 e 0.5.

5. Sia ora A una matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono dei vettori colonna $x \neq 0$ che soddisfano la condizione

$Ax = \lambda x,$

che si puo' riscrivere

$Ax - \lambda x = 0,$

o

$Ax - \lambda I_n x = 0,$

o

$(A - \lambda I_n)x = 0.$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Il polinomio che compare al primo membro di questa equazione e' detto *polinomio caratteristico* della matrice A; e' un polinomio di grado n pari all'ordine della matrice.

Abbiamo cosi' provato il

Teorema 2 *Gli autovalori di una matrice quadrata A sono le radici del polinomio caratteristico di A.*

Dunque una matrice quadrata di ordine n possiede al piu' n autovalori reali, e possiede esattamente n autovalori complessi (contando ciascuno con la sua molteplicita').