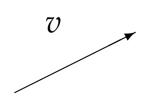
Algebra lineare (Matematica C.I.) 03.12.13

1. **Vettori nel piano.**

   Derscriviamo in modo un po′ informale alcuni concetti e costruzioni di tipo geometrico. Gli oggetti principali del nostro discorso sono i ″segmenti orientati″ del piano, che indichiamo con lettere minuscole $a, b, \ldots, v, \ldots$ Rappresentiamo ciascun segmento orientato con con una freccia avente origine nel primo estremo e termine nel secondo estremo.

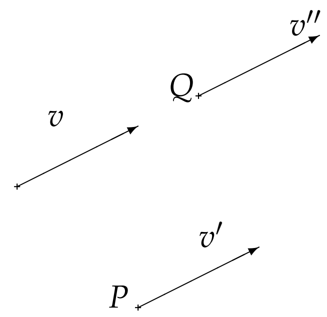
   

   Diciamo che due segmenti orientati v e v' sono *equivalenti*, e scriviamo

   $$v \sim v'$$

   quando v e v' hanno la stessa lunghezza, direzione, e verso; cio′ capita se e solo se i segmenti dei due vettori, il segmento congiungente i lori primi estremi, e il segmento congiungente i loro secondi estremi, formano un parallelogramma.

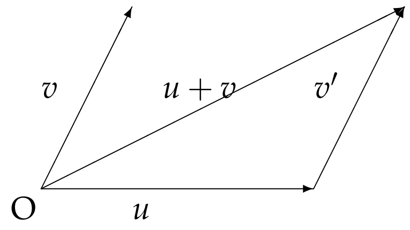
   Dati un segmento orientato v e un punto, c′e′ uno ed un solo segmento orientato che ha primo estremo nel punto ed e′ equivalente a v.

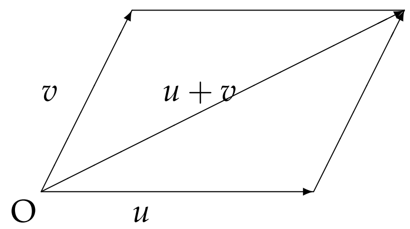
   Di seguito, al posto di ″segmento orientato″ diremo ″vettore applicato″ o in breve ″vettore;″ al posto di ″primo estremo″ e ″secondo estremo″ del segmento orientato diremo ″origine″ e ″estemo libero″ del vettore.

2. Fissato nel piano un punto O, consideriamo l′insieme $\mathfrak{P}_O$ dei vettori con origine in O. Dati due vettori $u, v \in \mathfrak{P}_O$, definiamo il vettore somma $u + v$ di u e

v come il risultato della seguente costruzione: consideriamo il vettore v' che ha origine nell'estremo libero del vettore u ed e' equivalente al vettore v, e prendiamo il vettore che ha origine O e estremo libero l'estremo libero di v'



Equivalentemente, il vettore somma $u+v$ si puo' ottenere considerando il parallelogramma che ammette u e v come lati, e prendendo la diagonale uscente da O:



Questa operazione di addizione di vettori risulta essere commutativa e associativa:

$u+v=v+u$,

$(u+v)+w=u+(v+w)$,

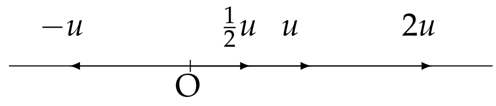
per ogni terna di vettori $u, v, w \in \mathfrak{P}_O$.

Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore ridotto al solo punto O; questo vettore viene detto vettore nullo, e viene indicato col simbolo 0; in generale, quando questo simbolo comparira' in una espresssione, risultera' chiaro dal contesto se rappresenta il vettore nullo o il numero zero. La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni v, il suo simmetrico rispetto ad O viene indicato con $-v$.

3. Dato un vettore $v \in \mathfrak{P}_O$, c'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per v : per un numero intero relativo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, si pone

$$nv = \begin{cases} v + \quad v + \cdots + \quad v & n \text{ volte} & \text{per } n > 0 \\ 0 & & \text{per } n = 0 \\ (-v) + (-v) + \cdots + (-v) & -n \text{ volte} & \text{per } n < 0 \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori con origine O, che fornisce un vettore con origine O, e la moltiplicazione di un vettore con origine O per uno scalare reale, che fornisce ancora un vettore con origine O.

Queste operazioni e le operazioni sui numeri reali sono legate fra loro e dalle proprieta'

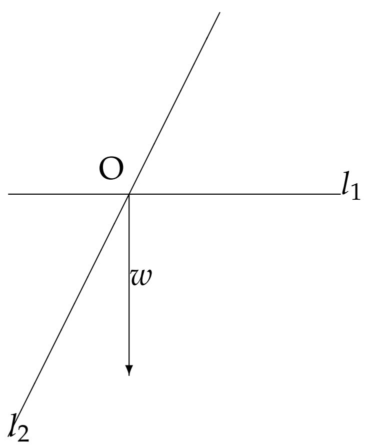
$$\begin{aligned} r(u+v) &= ru + rv, \\ (r+s)v &= rv + sv, \\ r(sv) &= (rs)v \\ 1v &= v \end{aligned}$$

per ogni $u, v \in \mathfrak{P}_0$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

Il calcolo con queste operazioni gode cosi' delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due nature, vettori e scalari, possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per scalari, ma non possiamo sommare vettori con scalari, ne' moltiplicare vettori per vettori.

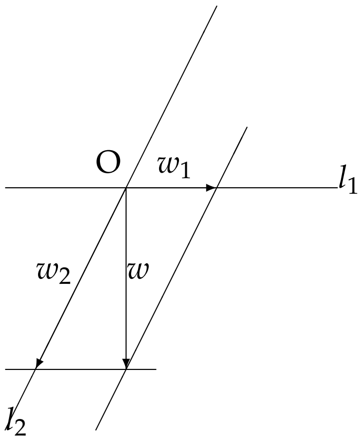
L'insieme $\mathfrak{P}_0$, munito di queste operazioni, viene detto *piano vettoriale geometrico con origine* O.

4. Date due diverse rette l_1, l_2 passanti per O, si ha che ogni vettore $w \in \mathfrak{P}_O$ si puo' scrivere come somma di un vettore $w_1 \in \mathfrak{P}_O$ che giace sulla retta l_1 e di un vettore $w_2 \in \mathfrak{P}_O$ che giace sulla retta l_2.



Il vettore w_1 si puo' ottenere nel modo seguente: si considera la retta parallela ad l_2 passante per l'estremo libero di w, si considera il punto di intersezione di questa retta con l_1 e infine si prende il vettore con origine O e estremo libero questo punto.

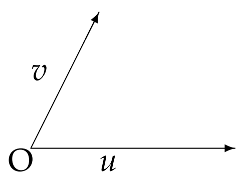
Il vettore w_2 si puo' ottenere nel modo seguente: si considera la retta parallela ad l_1 passante per l'estremo libero di w, si considera il punto di intersezione di questa retta con l_2 e infine si prende il vettore con origine O e estremo libero questo punto.



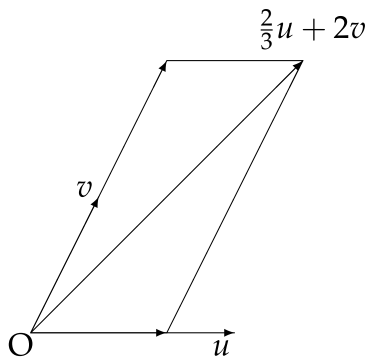
5. Data una sequenza di un certo numero di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathfrak{P}_0$ ed una sequenza dello stesso numero di scalari $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore
$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_m v_m,$$
detto *combinazione lineare* dei vettori dati; il numero reale r_i viene detto *coefficiente* del vettore v_i nella combinazione lineare.

Esempio

- La combinazione lineare dei vettori u, v



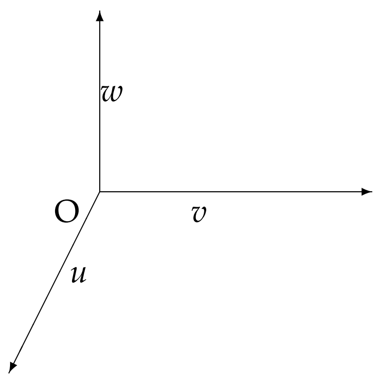
con coefficienti rispettivi $\frac{2}{3}$ e 2 da' come risultato il vettore



Si ha che

> se $u \in \mathfrak{P}_0$ e' un vettore $\neq 0$, allora ogni multiplo scalare di u giace sulla retta individuata da u; viceversa, ogni vettore $w \in \mathfrak{P}_0$ che giace su questa retta si puo' scrivere come multiplo scalare di u :
>
> $$w = ru,$$
>
> per un opportuno scalare $r \in \mathbb{R}$.
>
> se $u, v \in \mathfrak{P}_0$ non sono allineati, allora ogni $w \in \mathfrak{P}_0$ si puo' scrivere come combinazione lineare di u, v :
>
> $$w = ru + sv,$$
>
> per opportuni scalari $r, s \in \mathbb{R}$.

Per esercizio si determini una stima dei coefficienti che permettono di ottenere il vettore w come combinazione lineare dei vettori $u, v,$ secondo la figura seguente.



6. **Vettori nello spazio**

   I concetti definiti nel piano (vettore, somma di vettori, moltiplicazione di uno scalare per un vettore, combinazione lineare) si estendono in modo naturale allo spazio. L'insieme $\mathfrak{S}_0$ dei vettori dello spazio con origine in un punto fissato O, munito delle operazioni di somma di vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore, viene detto *spazio vettoriale geometrico con origine* O.

7. Dati un piano π_1 e una retta l_2 passanti per O, tali che π_1 non contenga l_2, si ha che ogni vettore $w \in \mathfrak{S}_O$ si puo' scrivere come somma

   $$w = w_1 + w_2$$

   di un vettore w_1 che giace sul piano π_1 e di un vettore w_2 che giace sulla retta l_2.

   Il vettore w_1 si puo' ottenere nel modo seguente: si considera la retta parallela ad l_2 passante per l'estremo libero di w, si considera il punto di intersezione di questa retta col piano π_1 e infine si prende il vettore con origine O e estremo libero questo punto.

   Il vettore w_2 si puo' ottenere nel modo seguente: si considera il piano parallelo a π_1 passante per l'estremo libero di w, si considera il punto di intersezione di questo piano con la retta l_2 e infine si prende il vettore con origine O e estremo libero questo punto.

8. Si ha che

   se $v \in \mathfrak{S}_0$ e' un vettore $\neq 0$, allora ogni multiplo scalare di v giace sulla retta individuata da v; viceversa, ogni vettore w che giace su questa retta si puo' scrivere come multiplo scalare di v :

   $$w = rv,$$

   per un opportuno scalare $r \in \mathbb{R}$.

   se $v_1, v_2 \in \mathfrak{S}_0$ non sono allineati, allora ogni combinazione lineare di v_1, v_2 giace sul piano individuato da v_1, v_2; viceversa, ogni vettore w che giace su questo piano si puo' scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2 :

   $$w = r_1v_1 + r_2v_2,$$

   per opportuni scalari $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

   se $v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{S}_0$ non sono complanari, allora ogni vettore w si puo' scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 :

   $$w = r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3,$$

   per opportuni scalari $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$.

Il terzo punto deriva dalla seguente osservazione. Il vettore w si puo′ scomporre nella somma di un vettore w_{12} che giace sul piano individuato da v_1 e v_2 e di un vettore w_3 che giace sulla retta individuata da v_3 :

$$w = w_{12} + w_3;$$

il vettore w_{12} si puo′ scrivere come combinazione lineare di v_1 e v_2 :

$$w_{12} = r_1 v_1 + r_2 v_2;$$

il vettore w_3 si puo′ scrivere come multiplo scalare di v_3 :

$$w_3 = r_3 v_3;$$

cosi′ in definitiva si ha

$$w = w_{12} + w_3 = r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3.$$