Algebra lineare (Matematica C.I.) 04.12.13

1. **Identificazione fra $\mathfrak{P}_O$ e $\mathbb{R}^2$**

   Fissato nel piano un punto O, consideriamo il piano vettoriale geometrico con origine in O, cioe' l'insieme $\mathfrak{P}_O$ dei vettori del piano aventi origine in O, munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari.

   Fissata una prima retta per O con un punto privilegiato E_1 diverso da O, ed una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto privilegiato E_2 diverso da O, c'e' un modo naturale di associare a ciascun punto del piano una coppia ordinata di numeri reali, in modo che ai punti O, E_1, e E_2 corrispondano rispettivamente le coppie $(0,0)$, $(1,0)$, e $(0,1)$. Ciascun coppia di numeri reali (u_1, u_2) si ottiene in corrispondenza di uno ed un solo punto del piano, e (u_1, u_2) vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

   Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano ed $\mathbb{R}^2$. Identificando ciascun vettore con origine in O col suo punto finale, si ha pure una corrispondenza biunivoca fra il piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$ ed $\mathbb{R}^2$.

   Indicati con e_1 ed e_2 i vettori con origine O e termini rispettivamente E_1, e E_2, si ha che un vettore u ha coordinate (u_1, u_2) se e solo se

   $$u = u_1 e_1 + e_2 u_2.$$

   L'addizione di vettori in $\mathfrak{P}_O$ viene rappresentata dall'addizione in $\mathbb{R}^2$, e la moltiplicazione per scalari in $\mathfrak{P}_O$ viene rappresentata dalla moltiplicazione per scalari in $\mathbb{R}^2$. Precisamente, se ai vettori u, v in $\mathfrak{P}_O$ corrispondono le due coppie

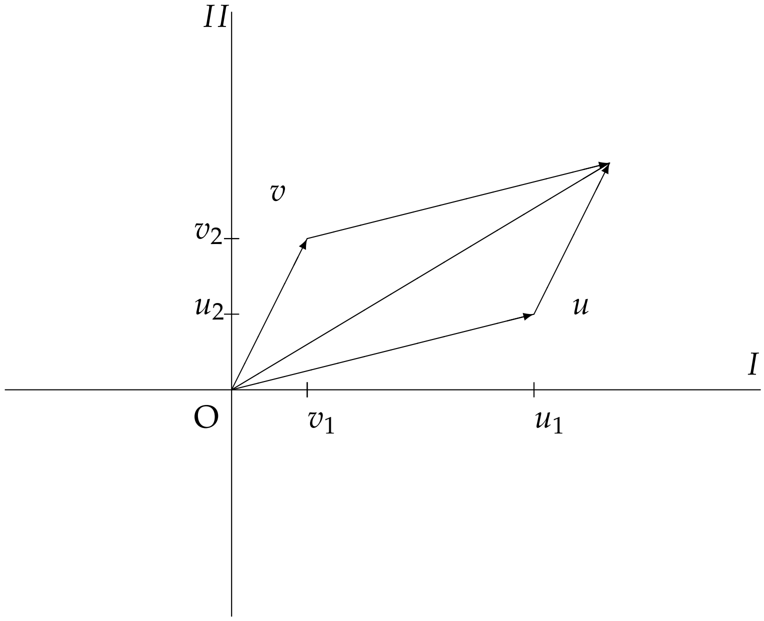
   $$(u_1, u_2), \qquad (v_1, v_2)$$

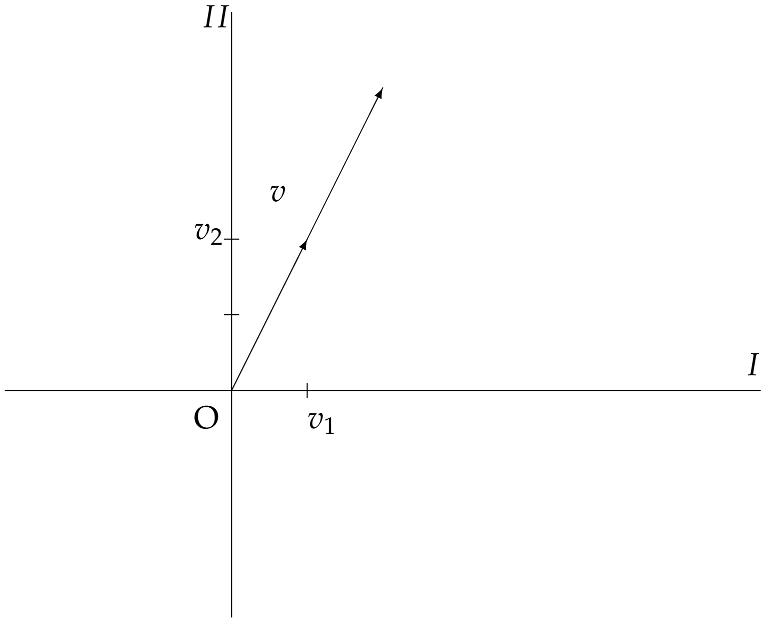
   in $\mathbb{R}^2$, allora al vettore $u + v$ corrisponde la coppia

   $$(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2),$$

   e per ogni scalare r al vettore rv corrisponde la coppia

   $$(rv_1, rv_2) = r(v_1, v_2).$$





D'ora in poi identificheremo ciascun vettore in $\mathfrak{P}_O$ con la coppia ordinata delle sue coordinate in $\mathbb{R}^2$:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

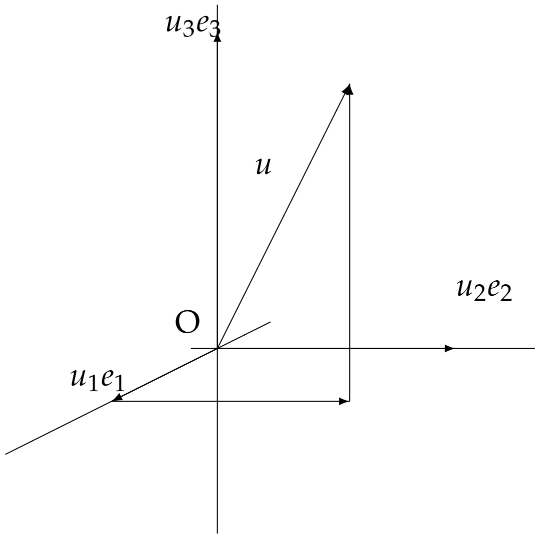
2. **Identificazione fra $\mathfrak{S}_O$ e $\mathbb{R}^3$**

   Fissato nello spazio un punto O, consideriamo lo spazio vettoriale geometrico con origine in O, cioe' l'insieme $\mathfrak{S}_O$ dei vettori dello spazio aventi origine in O, munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari.

Fissati nello spazio una prima retta per O con un punto E_1 diverso da O, una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto E_2 diverso da O, ed una terza retta per O, ortogonale alle prime due, con un punto E_3 diverso da O, c'e' un modo naturale di associare a ciascun punto dello spazio una terna ordinata di numeri reali in modo che ai punti O, E_1, E_2 e E_3 corrispondano rispettivamente le terne $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Ciascun terna (u_1, u_2, u_3) di numeri reali si ottiene in corrispondenza di uno ed un solo punto dello spazio, e (u_1, u_2, u_3) vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio ed $\mathbb{R}^3$. Identificando ciascun vettore con origine in O col suo punto finale, si ha pure una corrispondenza biunivoca fra lo spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{G}_O$ ed $\mathbb{R}^2$.



Indicati con e_1, e_2, e_3 i vettori con origine O e termini rispettivamente E_1, E_2, E_3 si ha che un vettore u ha coordinate (u_1, u_2, u_3) se e solo se

$$u = u_1e_1 + e_2u_2 + u_3e_3.$$

L'addizione di vettori in $\mathfrak{G}_O$ viene rappresentata dall'addizione in $\mathbb{R}^3$, e la moltiplicazione per scalari in $\mathfrak{G}_O$ viene rappresentata dalla moltiplicazione per scalari in $\mathbb{R}^3$. Precisamente, se ai vettori u, v, corrispondono le due terne

$$(u_i)_1^3, \qquad (v_i)_1^3,$$

allora al vettore $u + v$ corrisponde la terna

$$(u_i + v_i)_1^3 = (u_i)_1^3 + (v_i)_1^3,$$

e per ogni scalare r al vettore ru corrisponde la terna

$$(ru_i + v_i)_1^3 = r(u_i + v_i)_1^3.$$

D'ora in poi identificheremo ciascun vettore in $\mathfrak{S}_O$ con la terna ordinata delle sue coordinate:

$$u = [u_i]_1^3.$$

3. **Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.**

   Sia n un intero positivo fissato. Lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali, che rappresenteremo sempre come vettori colonna

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

   munito dell'operazione di addizione di due $n-$ple, definita da

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

   e dell'operazione di moltiplicazione di una $n-$pla per un numero reale, definita da

$$r \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ru_1 \\ \vdots \\ ru_n \end{bmatrix}.$$

   Penseremo ciascuna $n-$pla come un'unica entita', e le indicheremo con lettere minuscole $a, b, \ldots, u, v, \ldots$.

   La n-pla $0_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ viene detta *vettore nullo* di $\mathbb{R}^n$.

   Al posto di $n-$pla useremo spesso il termine *vettore*, e al posto di numero reale useremo il termine *scalare*.

   Data una sequenza di un certo numero di vettori $v_1, \ldots, v_m$ in $\mathbb{R}^n$ ed una sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, \ldots, r_m$ in $\mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m$$

   in $\mathbb{R}^n$, detto *combinazione lineare* dei vettori $v_1, \ldots, v_m$ con coefficienti $r_1, \ldots, r_m$.

4. Dati in $\mathbb{R}^n$ $m + 1$ vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ v_m = \begin{bmatrix} v_{1m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix}; \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

ci chiediamo se w e' o meno combinazione lineare degli m vettori $v_1, \ldots, v_m$. Cio' significa chiedersi se l'equazione fra vettori nelle m incognite scalari $x_1, \ldots, x_m$

$$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = w$$

ha soluzione o meno. Sostituendo a $v_1, \ldots, v_m, w$ i loro valori, si ha

$$x_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} v_{1m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

ed uguagliando le componenti dei vettori si ha il sistema di n equazioni fra scalari nelle m incognite $x_1, \ldots, x_m$

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + \cdots + v_{1m}x_m = w_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ v_{n1}x_1 + \cdots + v_{nm}x_m = w_n \end{cases}.$$

Dunque si ha che

> in $\mathbb{R}^n$ la ricerca delle combinazioni lineari di m vettori che risultano in un dato vettore si traduce sempre nella ricerca delle soluzioni di un sistema lineare di n equazioni in m incognite.

5. **Dipendenza/Indipendenza lineare.**

Nello spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$, quando pensiamo a un vettore lo immaginiamo diverso dal vettore nullo, quando pensiamo a due vettori li immaginiamo non allineati, e quando pensiamo a tre vettori li immaginiamo non complanari.

Queste configurazioni geometriche possono essere descritte algebricamente, ad esempio si ha che due vettori non sono allineati se e solo se nessuno dei due e' multiplo scalare dell'altro.

Dunque possiamo trasferire questi concetti da $\mathfrak{S}_O$ ad $\mathbb{R}^3$ ed estenderli a $\mathbb{R}^n$.

Def. *Siano dati m vettori $v_1, \ldots, v_m$ in $\mathbb{R}^n$, con $m > 1$.*

- *se c'e' un v_i che e' combinazione lineare degli altri, diciamo che $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti;*
- *se nessun v_i e' combinazione lineare degli altri, diciamo che $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti.*

Diciamo che v in $\mathbb{R}^n$ e' linearmente dipendente o indipendente secondoche rispettivamente $v = 0_n$ o $v \neq 0_n$.

Esplicitamente, i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti se c'e' un vettore v_i e ci sono $m-1$ scalari $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$v_i = r_1 v_1 + \cdots + r_{i-1} v_{i-1} + r_{i+1} v_{i+1} + \cdots + r_m v_m.$$

Esempi

- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si ha
$$v_2 = 0 v_1.$$
Dunque v_1, v_2 sono linearmente dipendenti.
- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$. Si ha
$$v_1 = \frac{2}{3} v_2.$$
Dunque v_1, v_2 sono linearmente dipendenti.
- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$. Non esiste alcun scalare r tale che
$$v_1 = r v_2,$$
e non esiste alcun scalare s tale che
$$v_2 = s v_1.$$
Dunque v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Si ha
$$v_2 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3.$$
Dunque v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.
- Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Non esistono scalari r, s tali che
$$e_1 = r e_2 + s e_3;$$

non esistono scalari r, s tali che

$$e_2 = re_1 + se_3;$$

e non esistono scalari r, s tali che

$$e_3 = re_1 + se_2.$$

Dunque e_1, e_2, e_3 sono linearmente indipendenti.

6. **Fatti generali**

- Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Se uno di essi, ad esempio v_1, e' uguale al vettore nullo 0, allora si ha
  $v_1 = 0v_2 + \cdots + 0v_m$,
  cosi' $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti.
- Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, entrambi diversi dal vettore nullo 0.
  Supponiamo che v_1 sia un multiplo scalare $v_1 = rv_2$ secondo uno scalare r di v_2; osserviamo che lo scalare r deve essere $\neq 0$, altrimenti $v_1 = 0$; dunque abbiamo che v_2 e' un multiplo scalare $v_2 = sv_1$ secondo lo scalare $s = 1/r$ di v_1. Allo stesso modo, se supponiamo che v_2 sia un multiplo scalare di v_1, abbiamo pure che v_1 e' un multiplo scalare di v_2. Diciamo in questo caso che i due vettori v_1 e v_2 sono fra loro proporzionali.
  Chiaramente, se v_1 e v_2 sono fra loro proporzionali allora sono linearmente dipendenti, e se v_1 e v_2 non sono fra loro proporzionali allora sono linearmente indipendenti.
- Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$, $\ldots$ $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.
  Sia i un indice compreso fra 1 ed n. Ci chiediamo se ci sono $n-1$ scalari $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ tali che

  $$e_i = r_1 e_1 + \cdots + r_{i-1} e_{i-1} + r_{i+1} e_{i+1} + \cdots + r_n e_n.$$

  Prendendo ad entrambe i membri la $i-$ma componente si ha l'uguaglianza

  $$1 = r_1 0 + \cdots + r_{i-1} 0 + r_{i+1} 0 + \cdots + r_n 0.$$

  che e' impossibile.
  Dunque nessun vettore e_i e' combinazione lineare degli altri, e i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti.

7. Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Ci chiediamo se v_1 e' combinazione lineare di v_2 e v_3, cioe' se l'equazione nelle incognite scalari q, r

$$v_2 q + v_3 r = v_1$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ha qualche soluzione.

Questa equazione equivale al un sistema di 3 equazioni nelle due incognite q, r ottenuto ugualgiando componente per componente i due membri dell'equazione

$$\begin{cases} q + r = 1 \\ 2q + 3r = 1 \\ 4q + 9r = 1 \end{cases}$$

Questo sistema e' rappresentato dalla matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{array}\right],$$

che con operazioni elementari si puo' trasformare nella matrice

$$\left[\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema impossibile

$$\begin{cases} q + r &= 1 \\ r &= -1 \\ 0 &= 2 \end{cases}$$

Dunque v_1 non e' combinazione lineare di v_2 e v_3.

A questo punto non possiamo ancora dire nulla; dovremmo vedere se v_2 fosse combinazione lineare di v_1 e v_3; se per caso non lo fosse, non potremmo ancora dire nulla, e dovremmo vedere se v_3 fosse combinazione lineare di v_1 e v_2. Solo allora potremmo concludere se i vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti.

8. Decidere se un insieme di vettori e' linearmente dipendente o indipendente usando la definizione puo' essere piuttosto laborioso. Un utile criterio e' dato dal

   Teorema *Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori di $\mathbb{R}^n$.*

   (a) Se esistono $r_1, \dots, r_m$ in $\mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che
   $$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0_n,$$
   allora $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente dipendenti;

   (b) Se l'equazione
   $$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0_n,$$
   e' soddisfatta solo per $x_1 = \ldots = x_m = 0$, allora $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

   Dim. Dimostriamo solo la parte (a).

   Sia $m = 1$. Supponiamo che l'uguaglianza $r_1 v_1 = 0_n$ valga per qualche scalare non nullo r_1; allora deve essere $v_1 = 0_n$, e cosi' v_1 e' linearmente dipendente.

   Sia $m > 1$. Supponiamo che l'uguaglianza
   $$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0_n$$
   valga per certi scalari non tutti nulli $r_1, \dots, r_m$; supponiamo per semplicita' che $r_1 \neq 0$. Possiamo ricavare v_1 come combinazione lineare
   $$v_1 = -\frac{r_2}{r_1} v_2 - \cdots - \frac{r_m}{r_1} v_m,$$
   di $v_2, \dots, v_m$. Dunque $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente dipendenti. $\square$

   Esempi

   - Ci chiediamo se i vettori
     $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$
     sono linearmente dipendenti o indipendenti. Consideriamo l'equazione
     $$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$
     nelle incognite scalari x_1, x_2, x_3. Questa equazione fra vettori di $\mathbb{R}^3$ e' equivalente al sistema lineare omogeneo rappresentato dalla matrice
     $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right],$$

che con operazioni elementari puo' essere trasformata nella matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

alla quale corrisponde un sistema lineare omogeneo indeterminato.
Dunque esistono r_1, r_2, r_3 in $\mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 = 0,$$

e i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

- Ci chiediamo se i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti. Consideriamo l'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$

nelle incognite scalari x_1, x_2, x_3. Questa equazione fra vettori di $\mathbb{R}^3$ e' equivalente al sistema lineare omogeneo rappresentato dalla matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right],$$

che con operazioni elementari puo' essere trasformata nella matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

alla quale corrisponde un sistema lineare omogeneo determinato.
Dunque l'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$

ha solo la soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, e i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

9. **Fatti generali**

- Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.
  Consideriamo i primi m vettori $e_1, e_2, \ldots, e_m$ con $m \leq n$, e ci chiediamo se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Consideriamo l'equazione

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m = 0,$$

  nelle incognite scalari $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Questa equazione fra vettori di $\mathbb{R}^n$ e' equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ x_m = 0 \\ 0 = 0 \\ \quad\vdots \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

  Dunque i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sono linearmente indipendenti.
- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo m vettori $v_1, \ldots, v_m$, con $m > n$. L'equazione

$$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0_n$$

  e' equivalente a un sistema lineare omogeneo di n equazioni in $m > n$ incognite. Per uno dei teoremi sui sistemi lineari (cfr. Lez. III), questo sistema e' indeterminato, e cosi' ha qualche soluzione $(r_1, \ldots, r_m)$ diversa dalla soluzione banale $(0, \ldots, 0)$. Dunque si ha

$$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0_n$$

  con qualche $r_i \neq 0$, e i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti.
- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo n vettori $v_1, \ldots, v_n$. L'equazione

$$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0_n$$

  e' equivalente a un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite. Per uno dei teoremi sui determinanti (cfr. Lez. IX), si ha che questo sistema e' determinato o indeterminato secondo che il determinate $\det [v_1, \ldots, v_n]$ sia diverso o uguale a zero. Dunque si ha che se $\det [v_1, \ldots, v_n] \neq 0$ allora i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti, e se $\det [v_1, \ldots, v_n] = 0$ allora i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti.

Da questi fatti segue in particolare che

> *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$*, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti e′* n.