Algebra lineare (Matematica C.I.) 10.12.13

1. Fissato nello spazio un punto O, consideriamo lo spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$ dei vettori dello spazio con origine nel punto O.

   Sia π un piano passante per il punto O; per come sono definite le operazioni fra vettori e fra vettori e scalari, si ha che (i) la somma di due vettori con origine O che stanno sul piano π e' un vettore con origine O che sta ancora sul piano π; (ii) il prodotto di un vettore con origine O che sta sul piano π per uno scalare reale e' un vettore con origine O che sta ancora sul piano π. Le stesse considerazioni valgono per una retta l passante per il punto O.

   Si ha che il punto O, le rette passanti per O, i piani passanti per O e l'intero spazio sono gli unici sottinsiemi non vuoti dello spazio che posseggono le proprieta' sopra evidenziate.

   Queste considerazioni suggeriscono la seguente

   Definizione 1 *Un sottinsieme $V \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ se*

   - *per ogni $u, v \in V$, anche $u + v \in V$;*
   - *per ogni vettore $u \in V$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$, anche $ru \in V$;*
   - $0_n \in V$.

   Due esempi banali di sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$: l'insieme $\{0_n\}$ ridotto al vettore nullo di $\mathbb{R}^n$; l'intero spazio $\mathbb{R}^n$.

   Qualche altro esempio. Fissato un intero m con $1 \leq m \leq n$, consideriamo l'insieme V_m dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che hanno le componenti dopo la $m-$ma tutte nulle
   $$V_m = \left\{x = [x_i]_1^n \ : \ x_{m+1} = 0, \ x_{m+2} = 0, \ \ldots, \ x_n = 0.\right\}$$
   L'insieme V_m e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

2. Fissato nello spazio un punto O, consideriamo lo spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$ dei vettori dello spazio con origine nel punto O.

   Sia l una retta passante per il punto O, e sia $v \in \mathfrak{S}_O$ un vettore che sta sulla retta l; se v e' diverso dal vettore nullo, si ha che i vettori rv multipli scalari di v descrivono al variare di r in $\mathbb{R}$ tutti e soli i vettori che stanno sulla retta l. Identificando ogni vettore col suo estremo libero, si ha dunque
   $$l = \{rv; \ r \in \mathbb{R}\}.$$

   Sia π un piano passante per il punto O, e siano $u, v \in \mathfrak{S}_O$ due vettori che stanno sul piano π; se u e v non sono allineati, si ha che i vettori $ru + sv$

combinazioni lineari di u e v descrivono al variare di r ed s in $\mathbb{R}$ tutti e soli i vettori che stanno sul piano π. Identificando ogni vettore col suo estremo libero, si ha dunque

$$\pi = \{ru + sv;\ r, s \in \mathbb{R}\}.$$

Queste considerazioni suggeriscono la seguente

Definizione 2 *Dati $v_1, \dots, v_m$ vettori in $\mathbb{R}^n$, l'insieme di tutte combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_m$ si dice sottospazio generato da $v_1, \dots, v_m$ e si indica con $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$; in simboli si ha*

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \{r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m;\ r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ in quanto

- per ogni u e v in $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$,

  $$u = \sum_1^m r_i v_i \qquad e \qquad v = \sum_1^m s_i v_i,$$

  si ha

  $$u + v = \sum_1^m r_i v_i + \sum_1^m s_i v_i = \sum_1^m (r_i + s_i) v_i$$

  e dunque $u + v$ sta in $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$.
- per ogni $u = \sum_1^m r_i v_i$ in $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$, e per ogni r in $\mathbb{R}$, si ha

  $$ru = r \sum_1^m r_i v_i = \sum_1^m (r r_i) v_i$$

  e dunque ru sta in $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$.
- si ha $0_n = \sum_1^m 0 v_i$ e dunque 0_n sta in $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Osserviamo inoltre che tutti i vettori $v_1, \dots, v_m$ appartengono al sottospazio $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$; infatti, per ogni $i = 1, 2, \dots, m$ si ha

$$v_i = 0v_1 + \cdots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \cdots + 0v_m.$$

In realta' $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ e' il piu' piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti i vettori $v_1, \dots, v_m$.

Se V e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e $v_1, \dots, v_m$ sono vettori in $\mathbb{R}^n$ con

$$V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle,$$

allora diciamo che V e' generato da $v_1, \dots, v_m$ e che $v_1, \dots, v_m$ generano V.

3. Le rette per l'origine nello spazio $\mathbb{R}^3$ hanno come analogo in $\mathbb{R}^n$ i sottospazi $\langle u\rangle$ generati da un vettore non nullo $0_n \neq u \in \mathbb{R}^n$; i piani per l'origine nello spazio $\mathbb{R}^3$ hanno come analogo in $\mathbb{R}^n$ i sottospazi $\langle u, v\rangle$ generati da due vettori linearmente indipendenti $u \in \mathbb{R}^n$; siamo cosi' portati a considerare i sottospazi $\langle v_1, \ldots, v_m\rangle$ generati da m vettori linearmente indipendenti $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Di seguito mostriamo che ci si puo' sempre ricondurre a questo caso.

   Siano $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, con $m > 1$. Se v_m e' combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{m-1}$, allora
   $$\langle v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m\rangle = \langle v_1, \ldots, v_{m-1}\rangle.$$
   Infatti, da un lato e' chiaro che ogni combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{m-1}$ e' anche una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m$.

   Dall'altro, nell'ipotesi che v_m sia combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{m-1}$, cioe' che v_m si possa scrivere
   $$v_m = s_1 v_1 + \cdots + s_{m-1} v_{m-1}$$
   si ha pure che ogni combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m$
   $$r_1 v_1 + \cdots + r_{m-1} v_{m-1} + r_m v_m$$
   si puo' scrivere
   $$\begin{aligned} r_1 v_1 + \cdots + r_{m-1} v_{m-1} + r_m \left(s_1 v_1 + \cdots + s_{m-1} v_{m-1}\right) \\ = \left(r_1 + r_m s_1\right) v_1 + \cdots + \left(r_{m-1} + r_m s_{m-1}\right) v_{m-1} \end{aligned}$$
   e' dunque e' anche una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{m-1}$.

   In modo analogo si prova che, se un vettore v_i e' combinazione lineare dei rimanenti $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$ allora
   $$\langle v_1, \ldots, v_m\rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m\rangle.$$
   Iterando questo processo, si arriva a scrivere il sottospazio generato dall'insieme dei vettori $v_1, \ldots, v_m$ come il sottospazio generato da un sottinsieme di vettori $v_{j_1}, \ldots, v_{j_p}$ linearmente indipendenti
   $$\langle v_1, \ldots, v_m\rangle = \langle v_{j_1}, \ldots, v_{j_p}\rangle.$$

4. Consideriamo l'equazione lineare omogenea in tre incognite
   $$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \qquad \textit{in breve} \qquad a'x = 0,$$
   dove a' e' il vettore riga dei tre coefficienti e x e' il vettore colonna delle tre incognite. Possiamo risolverla ricavando $x_1 = -2x_2 - 3x_3$ e ponendo x_2 e x_3 uguali a parametri liberi; le soluzioni saranno dunque date da
   $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p - 3q \\ p \\ q \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = pu + qv$$

dove p e q variano liberamente in $\mathbb{R}$. Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione e' il piano $\langle u, v \rangle$ generato dai vettori u, v.

5. Si ha che:

   - l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea in tre incognite
     $$a'x = 0$$
     nella quale il vettore a' dei coefficienti e' non nullo, e' un piano per l'origine di $\mathbb{R}^3$;
   - l'insieme delle soluzioni di un sistema di due equazioni lineari omogenee in tre incognite
     $$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ a_2'x = 0 \end{cases}$$
     nel quale i vettori a_1', a_2' dei coefficienti sono non nulli e fra loro non proporzionali, e' una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$;
   - l'insieme delle soluzioni di un sistema di tre equazioni lineari omogenee in tre incognite
     $$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ a_2'x = 0 \\ a_3'x = 0 \end{cases}$$
     nel quale i vettori a_1', a_2', a_3' dei coefficienti sono linearmente indipendenti, e' ridotto all'origine di $\mathbb{R}^3$.

   Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine e tutte le rette di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine si trovano in questo modo.

   In generale si ha che l'insieme delle soluzioni di un qualsiasi sistema lineare omogeneo in n incognite
   $$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ \vdots \\ a_m'x = 0 \end{cases} \qquad (a_1, \ldots, a_m \in R^n)$$
   e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

   Infatti:

   - se due vettori $s, t \in \mathbb{R}^n$ sono soluzioni del sistema, cioe' se
     $$a_i's = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m \qquad e \qquad a_i't = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$
     allora per il vettore somma $s + t$ si ha
     $$a_i'(s + t) = a_i's + a_i't = 0 + 0 = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$
     cioe' $s + t$ e' una soluzione del sistema;

- se il vettore $s \in \mathbb{R}^n$ e' una soluzione del sistema, cioe' se $a_i's = 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$ e se r e' uno scalare, allora per il vettore rs si ha

$$a_i'(rs) = r\left(a_i's\right) = r0 = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m,$$

cioe' rs e' una soluzione del sistema;

- il vettore nullo 0_n e' una soluzione del sistema in quanto $a_i'0_n = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m$.

Si prova che, se il vettore a_i' dei coefficienti della $i-$ma equazione e' combinazione lineare dei vettori $a_1', \ldots, a_{i-1}', a_{i+1}', \ldots, a_m'$ dei coefficienti delle altre equazioni, allora il sistema

$$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ \vdots \\ a_m'x = 0 \end{cases}$$

ha le stesse soluzioni del sistema ottenuto cancellando la $i - ma$ equazione.

Iterando questo processo, si arriva a un sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{j_1}'x = 0 \\ \vdots \\ a_{j_p}'x = 0 \end{cases}$$

nel quale i vettori $a_{j_1}', \ldots, a_{j_p}'$ dei coefficienti delle equazioni sono linearmente indipendenti, e che ha le stesse soluzioni del sistema dato.

6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ abbiamo evidenziato i vettori e_1 che ha tutte le componenti nulle tranne la prima che vale 1, e_2 che ha tutte le componenti nulle tranne la seconda che vale 1, ..., e_n che ha tutte le componenti nulle tranne la $n-$ma che vale 1; abbiamo osservato che i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti e che ogni vettore x di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere come combinazione lineare

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n,$$

dei vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$; i coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le componenti del vettore x, e dunque questa scrittura e' unica.

Definizione 3 *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e siano $v_1, \ldots, v_m$ vettori di V. Diciamo che $v_1, \ldots, v_m$ formano una base di V se*

- *$v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti;*
- *$v_1, \ldots, v_m$ generano V.*

I vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$, detta base canonica di $\mathbb{R}^n$; il fatto che ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si possa scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ vale piu' in generale, nel senso della seguente

Proposizione 1 *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e sia $v_1, \ldots, v_m$ una base di V. Allora ogni vettore v in V si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

$$v = r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m$$

di $v_1, \ldots, v_m$. I coefficienti $r_1, \ldots, r_m$ si dicono prima, ..., $m-$ma coordinata di v rispetto alla base $v_1, \ldots, v_m$.

Dim. Sia v un qualsiasi vettore del sottospazio V. I vettori $v_1, \ldots, v_m$ generano V, dunque v si puo' scrivere in almeno un modo come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$; ora, se

$$v = r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m, \qquad e \qquad v = s_1 v_1 + \cdots + s_m v_m$$

sono due scritture di v come combinazione lineare di di $v_1, \ldots, v_m$, allora sottraendo membro a membro le due scritture otteniamo

$$0_n = (r_1 - s_1)v_1 + \cdots + (r_m - s_m)v_m.$$

I vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti, dunque

$$r_1 - s_1 = 0, \ \ldots, \ r_m - s_m = 0,$$

cioe'

$$r_1 = s_1, \ \ldots, \ r_m = s_m.$$

7. Si prova che ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ possiede almeno una base; in realta' ciascun sottospazio non nullo di $\mathbb{R}^n$ possiede infinite basi; vale pero' il seguente Teorema, che non dimostriamo.

Teorema 1 *Tutte le basi di uno stesso sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ sono formate dallo stesso numero di vettori. Questo numero si dice dimensione del sottospazio e si indica con $dim(V)$.*

Chiaramente si ha $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Per i sottospazi dati mediante generatori o equazioni omogenee valgono le

Proposizione 2 *Siano $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^m$, e sia*

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \{r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m; \ r_1, \ \ldots, \ r_m \in \mathbb{R}\}$$

il sottospazio generato da $v_1, \ldots, v_m$. Si ha

$$dim\,(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) \leq m$$

$$dim\,(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) = m \qquad \text{se e solo se} \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ sono lin. indip.}$$

Proposizione 3 *Siano* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^m$*, e sia*

$$N(a_1, \ldots, a_m) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \; a_1' x = 0, \; \ldots, \; a_m' x = 0\right\}$$

lo spazio delle soluzioni delle equazioni aventi come coefficienti i vettori $a_1', \ldots, a_m'$*. Si ha*

$$dim\left(N\left(a_1, \ldots, a_m\right)\right) \geq n - m$$

$$dim\left(N\left(a_1, \ldots, a_m\right)\right) = n - m \qquad \text{se e solo se} \qquad a_1, \ldots, a_m \text{ sono lin. indip.}$$