Algebra lineare (Matematica C.I.) 17.12.13

1. **Prodotto interno**

   Dati due vettori $a = [a_i]_1^n$ e $b = [b_i]_1^n$ di $\mathbb{R}^n$, il numero reale dato dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti dei due vettori

$$\sum_1^n a_i b_i = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a'b$$

   viene detto *prodotto interno canonico* di a per b.

   Dalle proprieta' delle operazioni nell'algebra delle matrici discendono le seguenti proprieta' del prodotto interno:

$$\begin{aligned} (a+c)'b &= a'b + c'b \\ a'(b+d) &= a'b + a'd \\ (ra)'b &= a'(rb) = r(a'b), \end{aligned}$$

   per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$.

   Osserviamo che scambiando i fattori il prodotto interno non cambia:

$$b'a = \sum_1^n b_i a_i = \sum_1^n a_i b_i = a'b;$$

   percio' potremo dire "prodotto interno fra a e b," ed usare indifferentemente la forma $a'b$ o la forma $b'a$.

   Osserviamo che il prodotto interno di un vettore con se' stesso e' la somma dei quadrati delle sue componenti:

$$a'a = \sum_1^n a_i^2,$$

   dunque esso e' sempre maggiore-uguale a zero, ed e' zero se e solo se tutte le sue compnenti sono nulle, cioe' il vettore e' il vettore nullo:

$$\begin{array}{lcl} a'a \geq 0, & & \forall a \in \mathbb{R}^n \\ a'a = 0, & \Leftrightarrow & a = 0_n \end{array}$$

   Un prodotto che prende in entrata due vettori di $\mathbb{R}^n$ e restituisce in uscita uno scalare in $\mathbb{R}$ e che soddisfa le proprieta' sopra evidenziate si dice *prodotto interno*; noi considereremo solo il prodotto interno canonico.

Esempio Consideriamo i vettori $e_1, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che per ogni vettore $a = [a_i]_1^n$ si ha

$$\begin{aligned} e_1'a &= 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 + \cdots + 0a_n = a_1; \\ e_2'a &= 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 + \cdots + 0a_n = a_2; \\ &\vdots \\ e_n'a &= 0a_1 + 0a_2 + 0a_3 + \cdots + 1a_n = a_n \end{aligned}$$

In particolare si ha

$$e_i'e_j = \ i - ma\ componente\ di\ e_j \ = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$$

2. **Ortogonalita'**

Se il prodotto interno fra due vettori a e b di $\mathbb{R}^n$ e' zero, diciamo che il vettore a e' *ortogonale* al vettore b, e scriviamo $a \perp b$; in simboli, poniamo

$$a \perp b \qquad \Leftrightarrow \qquad a'b = 0.$$

Dalle proprieta' del prodotto interno segue in particolare che: la relazione di ortogonalita' e' simmetrica

$$a \perp b \qquad \Leftrightarrow \qquad b \perp a;$$

il vettore nullo e' l'unico vettore di $\mathbb{R}^n$ ortogonale a se' stesso:

$$a \perp a \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 0_n.$$

Esempio Per quanto osservato al punto precedente, si ha che i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono a due a due ortogonali:

$$e_i \perp e_j \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Sia S un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a ciascun vettore di S e' detto *complemento ortogonale* di S, e viene indicato con $S^\perp$; in simboli:

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \ s'x = 0, \ \forall s \in S\}.$$

Dunque $S^\perp$ e' l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee in n incognite, con un'equazione per ciascun vettore in S, e si verifica che $S^\perp$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

3. **Proiezione ortogonale su un sottospazio di dimensione 1**

Sia $a \neq 0_n$ un vettore non nullo in $\mathbb{R}^n$, e sia $\langle a \rangle$ il sottospazio da esso generato.

Osserviamo che un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e' ortogonale ad ogni $v \in \langle a \rangle$ se e solo se x e' ortogonale ad a. Infatti: da un lato se si ha $x'v = 0$ per ogni $v \in \langle a \rangle$, allora in particolare si ha $x'a = 0$; dall'altro se si ha $x'a = 0$, allora per ciascun elemento v di $\langle a \rangle$, scritto $v = ar$ ($r \in \mathbb{R}$), si ha $x'v = x'(ar) = (x'a)r = 0r = 0$.

Dunque
$$V^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; a'x = 0 \right\}$$
e' l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea non banale e per quanto visto nella lezione XII e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ avente dimensione $n-1$.

Proposizione 1 *Sia a un vettore non nullo in $\mathbb{R}^n$, e sia $V = \langle a \rangle$ il sottospazio generato da a. Ogni $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come*
$$b = p + q, \qquad \text{con} \qquad p \in V \quad \text{e} \quad q \in V^\perp.$$
Inoltre
$$p = ar, \qquad \text{dove} \qquad r = \frac{a'b}{a'a}.$$

Il vettore p si dice *proiezione ortogonale di b su $V = \langle a \rangle$* e il vettore q si dice *proiezione ortogonale di b su $V^\perp$*. Lo scalare r si dice *coefficiente di Fourier di b rispetto ad a*.

Dim. Nel caso n=2 questa proposizione afferma che ogni vettore in $\mathbb{R}^2$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma di un vettore p sulla retta $V = \langle a \rangle$ e di un vettore q sulla retta $V^\perp$, e fornisce una formula per p. In questo caso $n = 2$ la prima affermazione puo' essere motivata da considerazioni di geometria elementare (cfr. lezione XIII, paragrafo 1), e la formula per p si puo' ricavare risolvendo le equazioni che identificano p e q (cfr. lezione XIII, paragrafo 3). Nel caso generale la formula per p si ricava allo stesso modo; pero' non si potranno piu' usare considerazioni geometriche, e bisognera' provare algebricamente che le formule per p e per q danno soluzioni effettive del problema, e che sono le uniche soluzioni.

Cerchiamo due vettori $p, q \in \mathbb{R}^n$ che soddisfino le condizioni
$$\begin{aligned} & b = p + q \\ & p \in V \\ & q \in V^\perp. \end{aligned}$$

Essendo V l'insieme dei multipli scalari di a ed essendo $V^\perp$ l'insieme deelle soluzioni dell'equazione $a'x = 0$, possiamo riscrivere queste condizioni nella forma

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= ar, \qquad r \in \mathbb{R} \\ a'q &= 0, \end{aligned}$$

dove r e' uno scalare incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per a' entrambe i membri si ha

$$a'b = a'(ar + q),$$

cioe'

$$a'b = a'a\, r + a'q,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$a'b = a'a\, r,$$

o

$$a'a\, r = a'b.$$

Ora, questa e' un'equazione lineare nell'incognita r, e il coefficiente $a'a$ e' diverso da 0 in quanto a e' diverso dal vettore nullo. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \frac{a'b}{a'a}.$$

Dunque c'e' un'unico valore per il vettore incognito p, dato da

$$p = ar = a\frac{a'b}{a'a}$$

e c'e' un'unico valore per il vettore incognito q, dato da

$$q = b - p = b - a\frac{a'b}{a'a}.$$

Questi valori di p e q soddisfano le condizioni poste; cio' e' ovvio per le prime due, verifichiamo la terza condizione:

$$a'q = a'(b - a\frac{a'b}{a'a}) = a'b - a'a\frac{a'b}{a'a} = a'b - a'b = 0.$$

4. **Esempio** In $\mathbb{R}^n$ sia $a = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ il vettore avente tutte le componenti uguali a uno, e sia $V = \langle a \rangle$ il sottospazio generato da a.

   Osserviamo che:

   V e' costituito dai vettori aventi tutte le componenti uguali;

   $V^\perp$ e' costituito dai vettori di $\mathbb{R}^n$ aventi somma delle componenti nulla o, che e' lo stesso, media delle componenti nulla.

   Abbiamo dunque: ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma di due vettori ortogonali, un vettore p avente tutte le componenti uguali e un vettore q avente media delle componenti nulla.

   Il coefficiente di Fourier di b rispetto ad a e'

$$r = \frac{a'b}{a'a} = \frac{1 \cdot b_1 + \cdots + 1 \cdot b_n}{1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1} = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = \mu_b,$$

   la media delle componenti di b.

   La proiezione ortogonale di b sul sottospazio $V = \langle a \rangle$ e' data da

$$p = ar = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \mu_b = \begin{bmatrix} \mu_b \\ \vdots \\ \mu_b \end{bmatrix},$$

   e la proiezione ortogonale di b sul sottospazio $V^\perp$ e' data da

$$q = b - p = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_b \\ \vdots \\ \mu_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - \mu_b \\ \vdots \\ b_n - \mu_b \end{bmatrix}.$$

5. **Proiezione ortogonale su un sottospazio**

   Siano $a_1, \ldots, a_m$ vettori in $\mathbb{R}^n$, e sia $V = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ il sottospazio da essi generato.

   Osserviamo che un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e' ortogonale a ciascun $v \in V$ se e solo se x e' ortogonale a ciascun generatore $a_1, \ldots, a_m$. Infatti: da un lato se si ha $x'v = 0$ per ogni $v \in V$, allora in particolare si ha $x'a_1 = \cdots = x'a_m = 0$; dall'altro se si ha $x'a_1 = \cdots = x'a_m = 0$, allora per ciascun $v \in V$, scritto $v = a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m$ ($r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$), si ha

$$\begin{aligned} x'v = x'(a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m) &= \left(x'a_1\right) r_1 + \cdots + \left(x'a_m\right) r_m \\ &= 0 r_1 + \cdots + 0 r_m = 0. \end{aligned}$$

Dunque
$$V^{\perp} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ a_1' x = 0, \ \dots, a_m' x = 0\right\}$$
e' l'insieme delle soluzioni di m equazioni lineari omogenee e per quanto visto nella lezione XII e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e se $a_1 \dots, a_m$ sono linearmenti indipendenti, allora $V = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ ha dimensione m e $V^{\perp}$ ha dimensione $n - m$.

Prima di procedere, conviene rappresentare il sottospazio $V = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ e il suo complemento ortogonale $V^{\perp}$ in un modo piu' sintetico. Le combinazioni lineari $a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m$ dei vettori $a_1, \dots, a_m$ si possono scrivere nella forma
$$a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix},$$
e le condizioni di ortogonalita' $a_1' x = 0, \ \dots, \ a_m' x = 0$ ai vettori $a_1, \dots, a_m$ si possono riscrivere nella forma
$$\begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Percio', posto $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{bmatrix}$, ed osservato che $\begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = A'$, possiamo scrivere
$$\begin{aligned} V &= \{Ar; \ r \in \mathbb{R}^m\}, \\ V^{\perp} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \ A'x = 0_m\}. \end{aligned}$$

Proposizione 2 *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Ogni $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come*
$$b = p + q, \qquad \textit{con} \qquad p \in V \quad \textit{e} \quad q \in V^{\perp}.$$
Se $a_1, \dots, a_m$ e' una base di V, posto $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{bmatrix}$ si ha
$$p = Ar, \qquad \textit{dove} \qquad r = \left(A'A\right)^{-1} A'b.$$

Il vettore p si dice *proiezione ortogonale di b su V* e il vettore q si dice *proiezione ortogonale di b su $V^{\perp}$*. Il vettore $r \in \mathbb{R}^m$ si dice *coefficiente di Fourier di b rispetto ad $a_1, \dots, a_m$*.

Dim. Nel caso $n = 3$ ed $m = 2$ questa proposizione afferma che ogni vettore in $\mathbb{R}^3$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma di un vettore p su un piano V e di un vettore q sulla retta $V^\perp$, e fornisce una formula per p. In questo caso la prima affermazione puo' essere motivata da considerazioni di geometria elementare (cfr. lezione XIII, paragrafo 4), e la formula per p si puo' ricavare risolvendo le equazioni che identificano p e q (cfr. lezione XIII, paragrafo 6). Nel caso generale la formula per p si ricava allo stesso modo; pero' non si potranno piu' usare considerazioni geometriche, e bisognera' provare algebricamente che le formule per p e per q danno soluzioni effettive del problema, e che sono le uniche soluzioni. In particolare, bisognera' provare che, sotto l'ipotesi $a_1, \ldots, a_m$ linearmente indipendenti, la matrice $A'A$ e' invertibile.

Mostriamo solo che i valori di p e q dati da

$$p = Ar, \quad con \quad r = (A'A)^{-1}A'b; \qquad q = b - p$$

soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} &b = p + q \\ &p \in V \\ &q \in V^\perp. \end{aligned}$$

Le prime due condizione sono chiaramente soddisfatte; verifichiamo la terza:

$$\begin{aligned} A'q = A'(b-p) = A'\left(b - A(A'A)^{-1}A'b\right) \\ = A'b - A'A(A'A)^{-1}A'b = A'b - A'b = 0_m. \end{aligned}$$

6. **Proiezione ortogonale su sottospazi di dimensione 2**

Consideriamo il caso in cui V sia il sottospazio generato da due vettori $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$, linearmente indipendenti. Cosi'

$$\begin{aligned} V &= \{a_1 r_1 + a_2 r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} r;\ r \in \mathbb{R}^2\}, \\ V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ a_1' x = a_2' x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} x = 0_2\}. \end{aligned}$$

Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q, \qquad con \qquad p \in V \quad e \quad q \in V^\perp,$$

e si ha

$$p = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} r,$$

dove

$$r = \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}' b$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} a_1'a_1 & a_1'a_2 \\ a_2'a_1 & a_2'a_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1'b \\ a_2'b \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che, se i due vettori a_1 e a_2 sono ortogonali, allora si ha

$$r = \begin{bmatrix} a_1'a_1 & 0 \\ 0 & a_2'a_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1'b \\ a_2'b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1'a_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2'a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1'b \\ a_2'b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_1'b}{a_1'a_1} \\ \frac{a_2'b}{a_2'a_2} \end{bmatrix}.$$

Dunuqe il vettore p proiezione ortogonale di b sullo spazio generato dai vettori a_1 e a_2 e' dato da

$$p = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_1'b}{a_1'a_1} \\ \frac{a_2'b}{a_2'a_2} \end{bmatrix} = a_1 \frac{a_1'b}{a_1'a_1} + a_2 \frac{a_2'b}{a_2'a_2}$$

cioe' p e' la combinazione lineare di a_1 e a_2 con coefficienti i coefficienti di Fourier di b rispetto ad a_1 e a_2.

Nel caso particolare in cui $a_1 = e_1$ ed $a_2 = e_2$ siano i primi due vettori della base canonica di R^n, posto $b = e_1 b_1 + e_2 b_2 + \cdots + e_n b_n$ si ha

$$p = e_1 \frac{e_1'b}{e_1'e_1} + e_2 \frac{e_2'b}{e_2'e_2} = e_1 b_1 + e_2 b_2,$$

e

$$q = b - p = e_3 b_3 + \cdots + e_n b_n.$$