

Algebra Lineare (Matematica C.I.), esercizi -7

1. Si determinino la dimensione e una base del sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

2. Si determinino la dimensione e una base del sottospazio di \mathbb{R}^4 costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

3. In \mathbb{R}^4 sono dati i vettori

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Si determinino le norme di u, v e $u + v$, e si verifichi la disuguaglianza triangolare. Si determini il coseno dell'angolo formato da u e v ; tale angolo è acuto o ottuso?

4. È dato il sistema lineare nelle incognite x_1, x_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha soluzioni? Ha un'unica soluzione ai minimi quadrati? In caso affermativo si determini la soluzione ai minimi quadrati del sistema, l'errore ad essa associato, e la norma di tale errore.

5. È dato il sistema lineare nelle incognite x_1, x_2

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 1 \\ 5x_1 - 5x_2 = 1 \\ -7x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases}$$

Il sistema ha soluzioni? Ha un'unica soluzione ai minimi quadrati? Si determinino le soluzioni ai minimi quadrati del sistema.