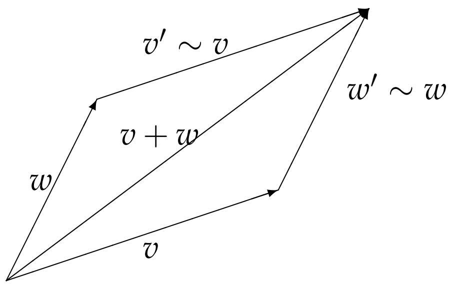
Algebra Lineare (Matematica C.I.), 18.12.13

1. **Lunghezza di un vettore nel piano**

   Consideriamo il piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$. Scelto un segmento come unita', possiamo parlare di lunghezza di un vettore $v \in \mathfrak{P}_O$ rispetto a tale segmento unita'; indichiamo tale lunghezza col simbolo $\|v\|$.

   La lunghezza dei vettori e' legata alle operazioni sui vettori nel modo seguente:

   - Consideriamo due vettori v, w e il vettore $v + w$ loro somma.

     Osserviamo che un punto che partendo da O si sposta prima lungo il vettore v e poi si sposta lungo il vettore $w' \sim w$ descrive due lati di un triangolo che ammette il vettore $v + w$ come terzo lato. Ora, la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Si ha cosi' si ha disuguaglianza

     $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

     detta appunto *disuguaglianza triangolare*.

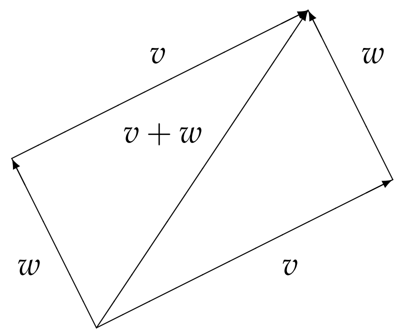
   - Consideriamo un vettore v, uno scalre r e il vettore vr multiplo di v secondo r. Allora:

     $$\|rv\| = |r|\|v\|,$$

     dove $|r|$ e' il valore assoluto di r.

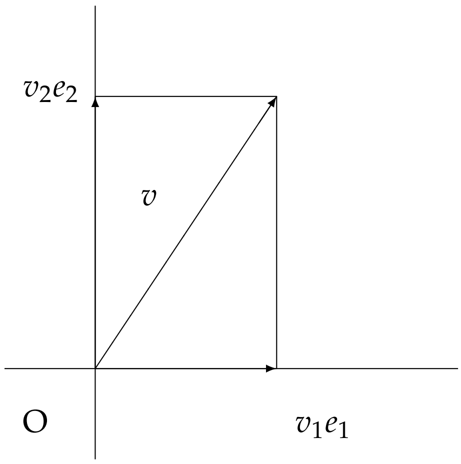
   Il teorema di Pitagora puo' essere espresso nella forma seguente: se due vettori v e w sono fra loro ortogonali, allora il quadrato della lunghezza del vettore somma $v + w$ e' uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei vettori addendi v, w :

   $$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$



2. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O nel quale i vettori canonici e_1 ed e_2 abbiano lunghezza 1, ed identifichiamo $\mathfrak{P}_O$ con $\mathbb{R}^2$.

   Se $v = [v_i]_1^2$, allora $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$, e il vettore v e' la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori $v_1 e_1$ e $v_2 e_2$,



   cosi' dal teorema di Pitagora si ha

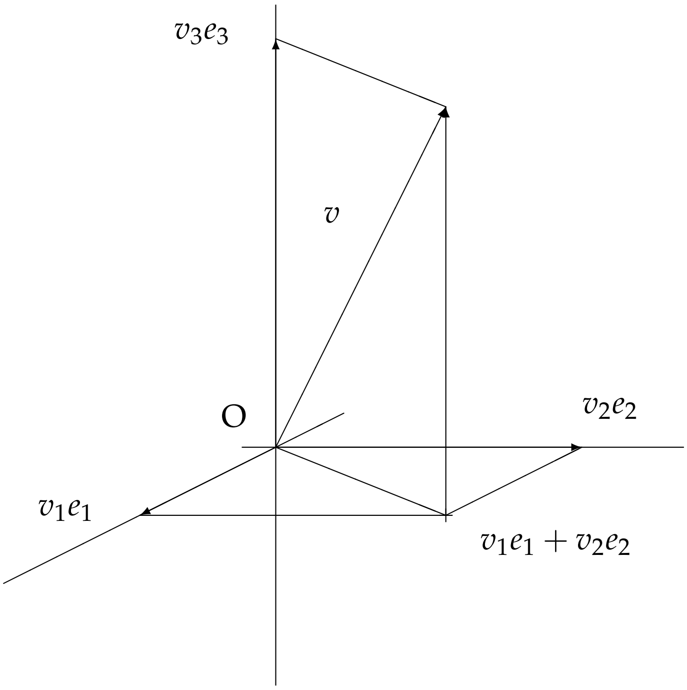
$$\begin{aligned} \|v\| &= \sqrt{\|v_1 e_1\|^2 + \|v_2 e_2\|^2} \\ &= \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

3. **Lunghezza di un vettore nello spazio**

   Consideriamo lo spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$. Scelto un segmento come unita', possiamo parlare di lunghezza di un vettore $v \in \mathfrak{S}_O$ rispetto a tale segmento unita'; indichiamo tale lunghezza col simbolo $\|v\|$.

   Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O nel quale i vettori canonici e_1, e_2 ed e_3 abbiano lunghezza 1, ed identifichiamo $\mathfrak{P}_O$ con $\mathbb{R}^3$.

Se $v = [v_i]_1^3$, allora $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, e il vettore v e' la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori $v_1e_1 + v_2e_2$ e v_3e_3,



cosi' dal teorema di Pitagora si ha

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sqrt{\|v_1e_1 + v_2e_2\|^2 + \|v_3e_3\|^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + |v_3|^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.\end{aligned}$$

4. **Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$.**

Def. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ definiamo la lunghezza $\|v\|$ di un vettore $v = [v_i]_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v'v}.$$

Solitamente, al termine *lunghezza* si preferisce il termine *norma.*

Nel caso $n = 1$ si ha che la norma di un numero reale r e' data da

$$\|r\| = \sqrt{r^2} = |r|,$$

il valore assoluto di r.

Si osservi che per i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si ha

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \ldots = \|e_n\| = 1.$$

Un vettore che come questi ha norma 1 si dice *versore*.

5. Le principali proprieta' della norma dei vettori in $\mathbb{R}^n$ sono:

   - la norma di un vettore e' sempre maggiore-uguale a zero e vale zero se e solo se il vettore e' nullo:
     $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n;$
     $\|v\| = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad v = 0_n.$
   - La norma del vettore prodotto di un vettore per uno scalare e' uguale al prodotto della norma del vettore per il valore assoluto dello scalare:
     $$\|rv\| = |r|\|v\|, \qquad r \in \mathbb{R}.$$
   - La norma del vettore somma e' minore o uguale alla somma delle norme dei vettori addendi:
     $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$
     Questa disuguaglianza viene detta *disuguaglianza triangolare*, per il significato che assume nel piano e nello spazio.

   La prime due proprieta' si verificano facilmente. Ad esempio, la seconda si verifica cosi':

   $$\|rv\| = \sqrt{(rv)'(rv)} = \sqrt{r^2(v'v)} = |r|\sqrt{v'v} = |r|\|v\|.$$

   La terza proprieta' non si verifica cosi' facilmente.

6. La norma e' legata al prodotto interno dalla seguente disuguaglianza (di Cauchy-Schwarz)

   - Per ogni v, w in $\mathbb{R}^n$ si ha
     $$|v'w| \leq \|v\|\|w\|;$$
     l'uguale vale se e solo se v, w sono linearmente dipendenti.

   Non dimostriamo questa disuguaglianza. La verfichiamo nel caso in cui $v = e_1$, il primo vettore della base canonica, e $w = [w_i]_1^n$, un vettore qualsiasi. Al primo membro si ha
   $$|e_1'w| = |w_1|;$$

al secondo membro si ha

$$\|e_1\|\|w\| = 1\|w\| = \sqrt{\sum_1^n w_i^2}.$$

E in effetti si ha

$$|w_1| = \sqrt{w_1^2} \leq \sqrt{\sum_1^n w_i^2}.$$

La disuguaglianza di Cauchy-Scwarz si puo' usare per definire l'angolo, meglio il coseno dell'angolo, fra due vettori di $\mathbb{R}^n$.

Infatti questa disuguaglianza si puo' scrivere nella forma

$$-1 \leq \frac{v'w}{\|v\|\|w\|} \leq 1;$$

esiste allora uno ed un solo numero reale ϑ, con $0 \leq \vartheta \leq \pi$ tale che

$$cos\vartheta = \frac{v'w}{\|v\|\|w\|};$$

si dice che ϑ e' l'angolo formato dai vettori v e w.

7. Un semplice conto particolarmente interessante:

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= (v+w)'(v+w) \\
&= (v'+w')(v+w) \\
&= v'v + v'w + w'v + w'w \\
&= \|v\|^2 + 2v'w + \|w\|^2.
\end{aligned}$$

Se v e w sono ortogonali, si ha $v'w = 0$, e

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

cioe' il Teorema di Pitagora.

8. **Soluzioni ai minimi quadrati**

Consideriamo il sistema lineare impossibile

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases} \qquad in\ breve \qquad ax = b.$$

Per ogni valore $s \in \mathbb{R}$ dell'incognita x, consideriamo il vettore degli scarti fra i primi e i secondi membri

$$b - as = \begin{bmatrix} 3-s \\ 9-s \end{bmatrix},$$

come *l'errore* che si commette assumendo che s sia una soluzione del sistema e misuriamo questo errore con la sua norma

$$\|b - as\| = \sqrt{(3-s)^2 + (9-s)^2}.$$

Ad esempio, l'errore corrispondente al valore 3 dell'incognita x e'

$$\|b - a3\| = \sqrt{(3-3)^2 + (9-3)^2} = 6.$$

Ci chiediamo se c'e' un $s \in \mathbb{R}$ cui corrisponde un errore di norma minima.

9. Consideriamo il generico sistema lineare di due equazioni in una incognta

$$\begin{cases} a_1 x = b_1 \\ a_2 x = b_2 \end{cases}, \qquad \textit{in breve} \quad ax = b,$$

dove supponiamo che $a \neq 0_2$.

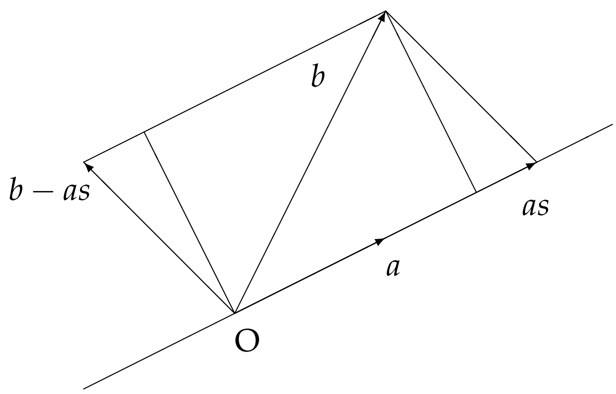
Se il vettore b sta sulla retta generata dal vettore a, allora il sistema ha soluzione, una ed una sola soluzione.

Se il vettore b non sta sulla retta generata dal vettore a, allora il sistema non ha soluzione.

Per ogni $s \in \mathbb{R}$, consideriamo l'errore

$$b - as$$

associato ad s.



Osserviamo che l'errore $b - as$ associato ad s ha norma minima se e solo se tale errore e' ortogonale ad a,

$$a'(b - as) = 0$$

cioe'

$$a'a\, s = a'b;$$

questa equazione lineare nell'incognita s ha una ed una sola soluzione data da

$$s = \frac{a'b}{a'a}.$$

Dunque c'e' uno ed un solo $s \in \mathbb{R}$ cui corrisponde un errore di norma minima, ed e' il coefficiente di Fourier della colonna b dei termini noti rispetto alla colonna a dei coefficienti del sistema.

10. Nell'esempio precedente

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases} \qquad \textit{in breve} \qquad ax = b,$$

c'e' uno ed un solo valore di s cui corrisponde un errore di norma minima ed e'

$$s = \frac{a'b}{a'a} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 9}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = 6,$$

l'errore corrispondente ha norma

$$\|b - a6\| = \sqrt{(3-6)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{18}.$$

11. Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Per ogni valore $s \in \mathbb{R}^n$ dell'incognita x, possiamo considerare il vettore scarto fra il primo ed il secondo membro

$$b - As$$

come *l'errore* che si commette assumendo che s sia una soluzione del sistema; questo errore e' un vettore di $\mathbb{R}^m$, che possiamo misurare con la sua norma

$$\|As - b\|.$$

Si noti che s e' una soluzione del sistema se e solo se $As - b = 0_m$, se e solo se $\|As - b\| = 0$.

Un vettore $s^* \in \mathbb{R}^n$ cui corrisponde un errore di norma minima, cioe' tale che

$$\|b - As*\| \leq \|b - As\| \qquad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

si dice *soluzione ai minimi quadrati* del sistema.

Teorema 1 *Sia $Ax = b$, un sistema lineare di m equazioni in n incognite.*

- *Le soluzioni ai minimi quadrati del sistema $Ax = b$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema di n equazioni in n incognite*
$$A'A\,x = A'b;$$
- *questo sistema ha sempre qualche soluzione; la soluzione e' unica se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti; in questo caso, l'unica soluzione e' data da*
$$x = \left(A'A\right)^{-1} A'b.$$

In altri termini abbiamo che

> *un sistema lineare $Ax = b$ ha sempre qualche soluzione ai minimi quadrati; la soluzione ai minimi quadrati e' unica se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti; in questo caso, l'unica soluzione ai minimi quadrati e' data dal coefficiente di Fourier di b rispetto ad A.*

Diamo solo l'idea della dimostrazione del teorema.

Il sistema $Ax = b$ si puo' scrivere nella forma
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$
dove $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ sono le colonne della matrice A.

Se il vettore b appartiene al sottospazio generato da $a_1, \ldots, a_n$, allora il sistema ha soluzione; tale soluzione e' unica se e solo se $a_1, \ldots, a_n$ sono linearmente indipendenti.

Se il vettore b non appartiene al sottospazio generato da $a_1, \ldots, a_n$, allora il sistema non ha soluzione.

Per ogni $s \in \mathbb{R}^n$, consideriamo l'errore
$$b - As$$
associato ad s.

Usando il teorema di Pitagora, si puo' mostrare che $b - As$ ha norma minima se e solo se e' ortogonale a $a_1, \ldots, a_n$,
$$a_1'(b - As) = 0, \ldots a_n'(b - As) = 0,$$
in breve
$$A'(b - As) = 0_n$$
cioe'
$$A'A\,s = A'b.$$

Abbiamo cosi' ottenuto un sistema lineare di n equazioni in n incognite. Si prova che questo sistema ha sempre soluzioni e che ha una ed una sola soluzione se e solo se le colonne $a_1, \ldots, a_n$ di A sono linearmente indipendenti. In tal caso la matrice $A'A$ e' invertibile e si ottiene
$$s = (A'A)^{-1}A'b.$$