Algebra Lineare (Matematica C.I.) A.A. 2013-2014. Argomenti svolti

1. **Sistemi di equazioni lineari.** Equazioni lineari in due incognite e rette nel piano; equazioni lineari in tre incognite e piani nello spazio. Equazione lineare in n incognite; sistema di m equazioni lineari in n incognite; soluzione di un sistema; sistema impossibile, determinato, indeterminato; sistemi equivalenti. Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema. Matrice associata ad un sistema. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Matrice triangolare, triangolare non degenere; matrice a scala, a scala ridotta. Algoritmo di Gauss, algoritmo di Gauss-Jordan, e loro uso per la risoluzione di un sistema lineare. Proposizione sui sistemi lineari con meno equazioni che incognite [dim.]. Sistemi lineari omogenei. Sistemi lineari omogenei con meno equazioni che incognite. [Cosa ci si aspetta per un sistema lineare di m equazioni in n incognite per $m < n$, $m = n$ o $m > n$.]

2. **Algebra delle matrici.** Ennuple, righe, colonne; prodotto di una riga per una colonna; rappresentazione sintetica $a'x = b$ di equazioni lineari. Matrici, tipo, notazioni; prodotto di due matrici; rappresentazione sintetica $Ax = b$ di sistemi lineari. Matrici unità. Associatività, non commutatività. Potenze con esponente intero non negativo di una matrice quadrata. Matrice inversa di una matrice quadrata; proprietà. Teorema sui sistemi lineari con matrice dei coefficienti invertibile; teorema inverso. Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa. Potenze con esponente intero relativo di una matrice quadrata. Evoluzione di un sistema e potenze di una matrice. Matrici diagonali, proprietà rispetto al prodotto. Prodotto matrice per matrice, matrice per colonna, riga per matrice. Autovettori e autovalori di una matrice quadrata. Uso di autovettori e autovalori di una matrice per ricondurre lo studio delle sue potenze alo studio delle potenze di una matrice diagonale. Somma di matrici, moltiplicazione di matrici per scalari, proprietà. Combinazioni lineari; base canonica di $\mathbb{R}^n$. Prodotto di matrici e combinazioni lineari; rappresentazione $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ di un sistema lineare in n incognite. Proprietà distributive. Matrice trasposta, proprietà.

3. **Determinanti.** Posizione del problema. Condizione sufficiente affinché un sistema di due equazioni lineari in due incognite sia determinato, formula per la soluzione, e determinante di una matrice quadrata di ordine due. Determinante di una matrice quadrata di ordine tre. Determinante di una matrice quadrata di ordine n, definizione ricorsiva mediante sviluppi di Laplace; [formula esplicita]. Proprieta' del determinante rispetto alle colonne; invarianza del determinante per trasposizione. Condizione sufficiente affinché un sistema di n equazioni lineari in n incognite sia determinato; formula per la soluzione (regola di Cramer). Algoritmo di Gauss per il calcolo del determinante. Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare quadrato sia determinato [dim.]; caso di un sistema lineare quadrato omogeneo. Autovalori e autovettori di una matrice quadrata. Unicità dell'autovalore

associato a un autovettore; come si determinano gli autovettori cui e' associato un dato autovalore. Polinomio caratteristico di una matrice quadrata. Teorema: gli autovalori di una matrice sono le radici del suo polinomio caratteristico.

4. **Spazio vettoriale** $\mathbb{R}^n$. Vettori nel piano, equivalenza di due vettori. Piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$, somma di due vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, proprietà. Multipli scalari di un vettore e rette per O; combinazioni lineari di due vettori e piano. Spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$. Multipli scalari di un vettore e rette per O; combinazioni lineari di due vettori e piani per O; combinazioni lineari di tre vettori e spazio. Identificazione di $\mathfrak{P}_O$ con $\mathbb{R}^2$. Identificazione di $\mathfrak{S}_O$ con $\mathbb{R}^3$. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Scritture di un vettore come combinazione lineare di vettori e sistemi lineari. Definizione di dipendenza/indipendenza lineare di una sequenza di vettori. Teorema di caratterizzazione della dipendenza/indipendenza lineare. Proposizione: il massimo numero di vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti è n. Definizione di sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Sottospazio generato da un insieme di vettori. Sopttospazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee. Definizione di base di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Proposizione e definizione di coordinate di un vettore rispetto ad una base. Teorema e definizione di dimensione di un sottospazio. Proposizione sulla dimensione del sottospazio generato da un insieme di vettori. Proposizione sulla dimensione del sottospazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee.

5. **Spazio vettoriale euclideo** $\mathbb{R}^n$. In $\mathfrak{P}_O$, definizione di proiezione ortogonale di un vettore su una retta per O. Rappresentazione della relazione di ortogonalità in funzione delle coordinate. Formula per la proiezione ortogonale di un vettore su una retta per O; coefficiente di Fourier. In $\mathfrak{S}_O$, proiezione ortogonale di un vettore su un piano per O. Rappresentazione della relazione di ortogonalità in funzione delle coordinate. Formula per la proiezione ortogonale di un vettore su un piano per O. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$: definizione di prodotto interno di due vettori, proprietà; definizione di ortogonalità fra due vettori. Complemento ortogonale di un sottinsieme. Proposizione e definizione di proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio di dimensione 1. Proposizione e definizione di proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio. In $\mathfrak{P}_O$, formula per la lunghezza di un vettore in funzione delle coordinate. In $\mathfrak{S}_O$, formula per la lunghezza di un vettore in funzione delle coordinate. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$: definizione di norma di un vettore, proprietà; disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; definizione di angolo fra due vettori; teorema di Pitagora. Definizione di soluzione ai minimi quadrati di un sistema di equazioni lineari. Teorema sull'esistenza ed eventuale unicità di soluzioni ai minimi quadrati di un sistema lineare, [dim.].

Gli argomenti e le dimostrazioni indicati tra parentesi verranno chiesti solo in funzione dei voti di massima fascia.