Le lezioni del 26.02 e 01.03 si riferiscono al Capitolo 1 "Introduzione ai sistemi lineari". Di seguito si elencano gli argomenti svolti, descrivendoli sinteticamente dando i riferimenti a tale capitolo, oppure descrivendoli dettagliatamente.

Lezione del 26.02

1–Equazioni lineari [cfr. par. 1.1, p. 1] In modo leggermente informale, si può dire che un'equazione *lineare* su $\mathbb{R}$ in una certa lista di incognite è un'equazione ottenuta uguagliando un polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ di primo grado nelle incognite ad una costante; per essere precisi, bisogna aggiungere che si ammette anche la possibilità che il poliniomio sia identicamente nullo. Una *soluzione* dell'equazione è una lista di valori in $\mathbb{R}$ delle incognite che rendono vera l'uguaglianza. Più in particolare e nel dettaglio:

- Un'equazione lineare in una incognita x su $\mathbb{R}$ è un'equazione del tipo $ax = b$, dove a e b sono numeri reali assegnati, detti coefficiente e termine noto dell'equazione; una soluzione dell'equazione è un numero reale $r \in \mathbb{R}$ tale che $ar = b$; per $a \neq 0$ c'è una ed una sola soluzione data da $x = b/a$, per $a = 0$ e $b \neq 0$ non ci sono soluzioni, e per $a = b = 0$ ciascun numero reale è soluzione.

- Un'equazione lineare in due incognite x, y su $\mathbb{R}$ è un'equazione del tipo $a_1x+a_2y = b$, dove a_1, a_2 e b sono numeri reali assegnati, detti coefficienti e termine noto dell'equazione; una soluzione dell'equazione è una coppia ordinata $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ di numeri reali tale che $a_1r + a_2s = b$; per $a_1 \neq 0$ ci sono infinite soluzioni date da $(-a_2/a_1\ y + b/a_1, y)$ con y variabile libera, per $a_2 \neq 0$ analogamente ..., per $a_1 = a_2 = 0$ e $b \neq 0$ non ci sono soluzioni, e per $a_1 = a_2 = b = 0$ ciascuna coppia ordinata di numeri reali è soluzione.

- Un'equazione lineare in n incognite $x_1, \cdots, x_n$ su $\mathbb{R}$ è un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, \cdots a_n$ e b sono numeri reali assegnati, detti coefficienti e termine noto dell'equazione; una soluzione dell'equazione è una $n-$pla ordinata $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ di numeri reali tale che

$$a_1r_1 + \cdots + a_nr_n = b;$$

se esiste qualche $a_i \neq 0$ allora ci sono infinite soluzioni che dipendono da $n-1$ variabili libere, se $a_1 = \cdots = a_n = 0$ e $b \neq 0$ allora non ci sono soluzioni, e se $a_1 = \cdots = a_n = b = 0$ allora l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}^n$.

2– Sistemi lineari [Par. 1.1, p. 2]. Un sistema lineare in una lista di incognite su $\mathbb{R}$ è una sequenza di equazioni lineari in quelle incognite su $\mathbb{R}$; una soluzione del sistema lineare è una lista di valori delle incognite in $\mathbb{R}$ che è soluzione dui ciascuna equazione. Più in dettaglio, un sistema lineare di m equazioni in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ su $\mathbb{R}$ è una sequenza di m equazioni lineari in $x_1, \ldots, x_n$ su $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove gli a_{ij} e i b_i sono numeri reali assegnati, detti coefficienti e termini noti dell'equazione; una soluzione dell'equazione è una $n-$pla ordinata $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ di numeri reali che è soluzione di ciascuna equazione.

-Dato un sistema lineare, ci si pongono le seguenti domande: esistono delle soluzioni? se si, quante? quali sono?

-Esempio. Consideriamo il sistema nelle incognite x, y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ \qquad 6y = 9 \end{cases}$$

Dalla $6y = 9$ si ottiene $y = 3/2$, e da $y = 3/2$ e da $2x + 3y = 8$ si ottiene $x = 7/4$; il sistema ha una ed una sola soluzione: $(7/4, 3/2)$.

-Esempio. Consideriamo il sistema nelle incognite x, y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases}$$

Osserviamo che: il primo membro della II equazione è il prodotto di 2 per il primo membro della I equazione, il secondo mebro della II equazione non è il prodotto di 2 per il secondo membro della I equazione, dunque le due equazioni sono incompatibili e non c'è alcuna soluzione. (Più formalmente: se ci fosse una soluzione (r, s) del sistema, si avrebbe $9 = 4r + 6s = 2(2r + 3s) = 2 \cdot 8 = 16$, impossibile).

-Esempio. Consideriamo il sistema nelle incognite x, y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 16 \end{cases}$$

Osserviamo che: il primo membro della II equazione è il prodotto di 2 per il primo membro della I equazione, il secondo mebro della II equazione è il prodotto di 2 per il secondo membro della I equazione, dunque il sistema ha le stesse soluzinoi della prima equazione $2x + 3y = 8$. Si può ricavare la x in funzione della y e così si ottiene che le soluzioni sono le coppie ordinate del tipo $(-3/2\ y + 4, y)$ con y variabile libera. Si sarebbe potuto anche ricavare la y in funzione della x e così si sarebbe ottnuto che le soluzioni sono le coppie ordinate del tipo $(x, -2/3\ x + 8/3)$ con x variabile libera. Si hanno due descrizioni diverse dello stesso insieme delle soluzioni, che sono infinite.

3–Righe, colonne, matrici; prodotto [cfr. Par. 1.2 pp. 4–8 e Par. 1.3 pp. 8–9]

-$n-$ple, righe, colonne. Una $n-$pla ordinata di numeri reali è data da un primo, un secondo, ..., un $n-$mo numero reale, detti sue componenti e viene rappresentata scrivendo fra parentesi tonde tali numeri separati da virgole nel loro ordine; di regola, indicheremo una $n-$pla ordinata con una lettera minuscola sottolineata e, una volta scelta una lettera per indicare una $n-$pla, useremo la stessa lettera con indici per indicare le sue componenti. L'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali viene indicato con $\mathbb{R}^n$. Risulta utile potere rappresentare una $n-$pla ordinata di numeri reali come una riga di numeri reali oppure come una colonna di numeri reali; di regola, indicata con una lettera una $n-$pla ordinata di mumeri reali, si indica la corrispondente colonna con la stessa lettera, e si indica la corrispondente riga con la stessa lettera munita di un apice:

$$\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n), \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \underline{a}' = (a_1 \ \cdots \ a_n).$$

-Si definsce il prodotto di una riga per una colonna aventi lo stesso numero di componenti come la somma dei prodotti delle componenti della riga per le corrispondenti componenti della colonna; il prodotto di una riga per una colonna che non hanno lo stesso numero di componenti non è definito. Così ad esempio

$$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 22.$$

In generale,

$$(a_1\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Questo prodotto può essere usato per rappresentare sinteticamente le equazioni lineari. Ad esempio, ciascuna equazione lineare $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ in due incognite x_1, x_2 si può rappresentare come un'equazione in una sola incognita $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^2$:

$$(a_1\ a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b, \quad \text{sinteticamente} \quad \underline{a}'\ \underline{x} = b.$$

Il generale, ciascuna equazione lineare $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ su $\mathbb{R}$ si può rappresentare come un'equazione in una sola incognita $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^n$:

$$(a_1\ \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b, \quad \text{sinteticamente} \quad \underline{a}'\ \underline{x} = b$$

-Matrici. Siano m ed n due interi positivi fissati. Una matrice di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ e' una tabella di $m \cdot n$ numeri reali disposti su m righe ed n colonne; l'elemento della $i-$ma riga e $j-$ma colonna di una matrice si dice in breve "elemento di posto (i, j)" della matrice. Le matrici di solito vengono indicate con lettere maiuscole; per indicare che una matrice A ha tipo $m \times n$ si usa scrivere $\underset{m\times n}{A}$. L'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ si indica con

$$\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

La generica matrice A di tipo $m \times n$ viene solitamente rappresentata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

oppure, piu' brevemente,

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}},$$

o $A = (a_{ij})$ quando il tipo e' chiaro dal contesto. Si noti che i e j non hanno alcun particolare significato, potrebbero essere sostituiti da altri due simboli, come h e k.

- Noi useremo talvolta una notazione un po' diversa, suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo come Matlab e Octave. Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A, per indicare una matrice, useremo il simbolo A_{ij} per indicare l'elemento di posto (i, j) in A.

-Matrici associate a un sistema lineare. I dati di cui consiste un sistema lineare di m equazioni in n incognite, fatta eccezione per i nomi delle incognite, sono descritti da: (1) la matrice $m \times n$ dei coefficienti ottenuta scrivendo nella prima, ..., $m-$riga i coefficienti delle n incognite nella prima, ..., $m-$ma equazione, o equivalentemente scrivendo nella prima, ..., $n-$ma colonna i coefficienti nelle m equazioni della prima, ..., $n-$ma incognita, (2) la colonna $m \times 1$ dei termini noti. La matrice $m \times n$ dei coefficienti si dice anche *matrice incompleta* del sistema, mentre la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta accostandole la colonna dei termini noti si dice *matrice completa* del sistema. Per esteso, al sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sono associate la matrice dei coefficienti e la colonna dein termin noti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e la matrrice completa

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

-Prodotto. Se il numero delle colonne di una matrice A e' uguale al numero delle righe di una matrice B, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B, ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo cosi' una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB. Ad esempio, si ha

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 4 & 5\cdot 2 + 6\cdot 5 & 5\cdot 3 + 6\cdot 6 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 4 & 7\cdot 2 + 8\cdot 5 & 7\cdot 3 + 8\cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{pmatrix}$$

In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ e' la matrice AB di tipo $m \times p$

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{AB}$$

data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i,j) in AB e' dato dal prodotto della riga $i-$ma di A per la colonna $j-$ma di

B :

$$
\begin{aligned}
(AB)_{ij} &= (A_{i1}\ A_{i2}\ \dots\ A_{in}) \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix} \\
&= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} \\
&= \sum_{h=1}^{n} A_{ih}B_{hj}.
\end{aligned}
$$

Nella notazione usuale, la definizione di prodotto e' la seguente: per $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$ si pone $AB = C$, dove $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$ e' data da

$$
c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}b_{h,j}.
$$

La moltiplicazione di matrici estende la moltiplicazione dei numeri reali, nel senso che le matrici di tipo $1 \cdot 1$ sono numeri reali e la moltiplicazione di matrici di tipo $1 \cdot 1$ e' la moltiplicazione di numeri reali.

-Sistemi lineari. Questo prodotto può essere usato per rappresentare sinteticamente i sistemi lineari. Ad esempio, ciascun sistema lineare

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}
$$

in due incognite x_1, x_2 si può rappresentare come un'equazione in una colonna incognita 2×1 con coefficiente una matrice 3×2 e con termine noto una colonna 3×1

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \text{sinteticamente} \quad A\ \underline{x} = \underline{b}.
$$

Il generale, ciascun sistema lineare di m equazioni in in n incognite su $\mathbb{R}$ si può rappresentare come un'equazione in una colonna incognita $\underline{x}$ $n \times 1$ con coefficiente una matrice A $m \times n$ e con termine noto una colonna $\underline{b}$ $m \times 1$:

$$
A\underline{x} = \underline{b}.
$$

- Associatività. Date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sarà di tipo $m \times q$:

$$
(AB)C, \qquad A(BC).
$$

Ad esempio, per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \\ A(BC) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprietà associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Potremo così scrivere un prodotto di più matrici senza usare parentesi. Gli elementi

$$(ABC)_{ij}\,, \qquad i = 1, \ldots, m;\; j = 1, \ldots, q,$$

della matrice ABC sono dati da

$$(ABC)_{ij} = \sum_{\substack{h=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,p}} A_{ih} B_{hk} C_{kj}.$$