Le lezioni del 26.02 e 01.03 si riferiscono al Capitolo 1 "Introduzione ai sistemi lineari". Di seguito si elencano gli argomenti svolti, descrivendoli sinteticamente dando i riferimenti a tale capitolo, oppure descrivendoli dettagliatamente.

Lezione del 01.03.

0– Sistemi lineari e matrici [cfr. 1.3, pp. 8–9]. Si è ricordato che per ciascun sistema lineare, si sono introdotte: la matrice dei coefficienti, la colonna delle incognite, la colonna dei termini noti, e la matrice completa =(matrice coefficienti | colonna termini noti), e che si è rappresentato il sistema con l'equazione "(matrice coefficienti) per (colonna incognite) = (colonna termini noti)".

1–Sistemi a scala, matrici a scala [cfr. 1.3, pp. 9–14].

–Si è illustrato il fatto che ci sono certi sistemi lineari che si risolvono molto facilmente.

-Esempio. Sistema nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} 7x + 6y + 5z &= 10 \\ \qquad 4y + 3z &= 1 \\ \qquad\qquad 2z &= 6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Risoluzione:

da $2z = 6$ si ottiene $z = 3$;

da $z = 3$ e $4y + 3z = 1$ si ottiene $y = -2$;

da $z = 3$ e $y = -2$ e $7x + 6y + 5z = 10$ si ottiene $x = 1$;

c'è una ed una sola soluzione: $(1, -2, 3)$.

-Esempio. Sistema nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} ax + by + cz &= g \\ \qquad dy + ez &= h \\ \qquad\qquad fz &= i \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ 0 & d & e & q \\ 0 & 0 & f & r \end{array}\right)$$

dove $a, b, \ldots, i$ sono parametri, con $a, d, f \neq 0$. Per ogni valore dei parametri, sotto la condizione data, il sistema ha una ed una sola soluzione.

-Esempio. Sistema nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} 3x + 5y + 7z &= 1 \\ \qquad y + 2z &= 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Risoluzione:

da $y + 2z = 1$ si ottiene $y = -2z + 1$;

da $y = -2z + 1$ e $3x + 5y + 7z = 1$ si ottiene $x = z - 4/3$;

ci sono infinite soluzioni: $(z - 4/3, -2z + 1, z)$, con z variable libera.

-Esempio. Sistema nelle incognite x, y, z, u :

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3u &= 0 \\ z - u &= 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Risoluzione:

da $z - u = 0$ si ottiene $z = u$;

da $z = u$ e $x - y + 2z - 3u = 0$ si ottiene $x = y + u$;

ci sono infinite soluzioni: $(y + u, y, u, u)$, con y e u variabili libere.

– Si è definito il *pivot* di una riga non nulla come il suo primo elemento non nullo. Si è definita matrice *a scala per righe*, in breve *a scala*, come una matrice nella quale i pivot della prima, seconda, ... righe non nulle stanno ciascuno strettamente a destra del precedente, e nella quale le eventuali righe nulle sono le ultime. Si è definito il *rango per righe* di una matrice a scala come il numero delle sue righe non nulle. Si è indicato il rango per righe di una matrice A con $rr(A)$, e si è osservato che se A ha tipo $m \times n$ allora $rr(A) \leq \min(m, n)$.

-Esempio. Tutte le matrici di tipo 4×6 della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove i simboli $\spadesuit$ indicano numeri reali diversi da zero (non necessariamente uguali) e i simboli $*$ indicano numeri reali qualsiasi (non necessariamente uguali), sono a scala, con rango per righe uguale a 3.

– Si è definito un sistema lineare *a scala* come un sistema lineare avente una matrice completa a scala. I sistemi lineari sopra considerati sono tutti a scala.

–Si è enunciata e berevemente giustificata la

Proposizione Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare a scala, di m equazioni in n incognite. Si ha $rr(A) \leq rr(A|b) \leq rr(A) + 1$, e

1) se $rr(A) = n = rr(A|b)$ allora il sistema ha una ed una sola soluzione;

2) se $rr(A) = rr(A|b) = r < n$ allora il sistema ha infinite soluzioni, che dipendono da $n - r$ variabili libere;

3) se $rr(A) < rr(A|b)$ allora il sistema non ha soluzioni.

2– Sistemi lineari equivalenti; operazioni elementari sulle equazioni di un sistema e sulle righe di una matrice [cfr. 1.4, pp. 14–15].

-Due sistemi lineari nelle stesse incognite si sono detti *equivalenti* se hanno le stesso insieme di soluzioni. Si sono presentate alcune operazioni che trasformano un sistema in uno equivalente.

-Esempio. Consideriamo l'equazione nelle incognite x, y

$$x + 3/2\ y = 3, \quad (1\ 3/2 \mid 3);$$

moltiplicando entrambi i membri per 2/3, otteniamo l'equazione

$$2/3\ x + y = 2, \quad (2/3\ 1 \mid 2),$$

e ciascuna soluzione della prima equazione è anche soluzione della seconda. Moltiplicando entrambi i membri della seconda equazione per 3/2 si ottiene la prima equazione, così ciascuna soluzione della seconda equazione è anche soluzione della prima. Le due equazioni sono equivalenti. Osserviamo che all'operazione di moltiplicare per un numero ρ entrambi i membri di una equazione corrisponde nella riga completa l'operazione di moltiplicare per ρ tutti gli elementi della riga, in breve moltiplicare per ρ la riga.

-Esempio. Consideriamo il sistema di due equazioni nelle incognite x, y

$$\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 3x + y &= 5 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right);$$

sommando alla seconda equazione la prima equazione si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 4x + 3y &= 9 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \end{array}\right),$$

e ciascuna soluzione del primo sistema è anche soluzione del secondo. Partendo dal secondo sistema e sottraendo alla seconda equazione la prima equazione si ottiene il primo sistema, così ciascuna soluzione del secondo sistema è anche soluzione del primo. I due sistemi sono equivalenti. Osserviamo che all'operazione di sommare alla seconda equazione la prima equazione corrisponde nella matrice completa l'operazione di sommare a ciascun elemento della seconda riga il corrispondente elemento della prima riga, in breve, sommare alla seconda riga la prima riga.

-Esempio. Consideriamo di nuovo il sistema di due equazioni nelle incognite x, y

$$\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 3x + y &= 5 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right);$$

sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per 2 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 5x + 5y &= 13 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 13 \end{array}\right),$$

e ciascuna soluzione del primo sistema è anche soluzione del secondo. Partendo dal secondo sistema e sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -2 si ottiene il primo sistema, così ciascuna soluzione del secondo sistema è anche soluzione del primo. I due sistemi sono equivalenti. Osserviamo che all'operazione di sommare alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per un numero reale α corrisponde nella matrice completa l'operazione sommare alla seconda riga la prima riga moltiplicata per α.

– Si sono definite le *operazioni elementari* sulle righe di una matrice:

moltiplicare la $i-$ma riga per un numero reale $\rho \neq 0$; in simboli, $R_i \to \rho R_i$;

scambiare le righe $i-$ma e $j-$ma; in simboli: $R_i \leftrightarrow R_j$;

sommare alla $i-$ma riga il prodotto del numero reale α per la $j-$ma riga; in simboli: $R_i \to R_i + \alpha R_j$.

–Si è enunciata la

Proposizione Siano $A\underline{x} = \underline{b}$ e $\tilde{A}\underline{x} = \underline{\tilde{b}}$ due sistemi lineari di m equazioni nelle stesse n incognite. Se la matrice $(\tilde{A}|\underline{\tilde{b}})$ è ottenuta dalla matrice $(A|\underline{b})$ mediante una serie di operazioni elementari sulle righe, allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $\tilde{A}\underline{x} = \underline{\tilde{b}}$ sono equivalenti.

3–Si è informalmente descritto l'"algoritmo di Gauss" [cfr. par. 1.4 pp. 16-17]; informalmente, in quanto si è descritto un processo nel quale vi sono passi che implicano scelte, e scelte diverse possono portare a risultati diversi.

Input: una matrice $m \times n$ su $\mathbb{R}$. Output: una matrice $m \times n$ su $\mathbb{R}$; a scala per righe. Passi: operazioni elementari sulle righe.

Descrizione informale: Si leggono gli elementi della matrice colonna per colonna, da sinistra verso destra. Se non si trova alcun elemento diverso da zero, la matrice è la matrice nulla, che è a scala, ed il processo termina. Altrimenti si avrà una prima colonna, diciamo la $j_1 - -$ma, nella quale compare qualche elemento diverso da zero. Applicando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che il primo elemento della j_1-ma colonna sia diverso da zero. Sommando alla seconda, terza, ..., riga opportuni multipli della prima riga, possiamo fare in modo che nella j_1-ma colonna solo il primo elemento sia diverso da zero. Osserviamo che il pivot della prima riga sta nella j_1-ma colonna e tutti gli eventuali pivot delle righe successive stanno strettamente a destra di esso

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \spadesuit & * & \cdots \\ 0 & & 0 & 0 & * & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots \end{pmatrix}$$

Si riapplica lo stesso processo alla sottomatrice costituita dalle righe dalla seconda in poi.

4–Si è descritta l'applicazione dell'algoritmo di Gauss alla risoluzione dei sistemi lineari: dato un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, si considera la sua matrice completa $(A|\underline{b})$, si applica l'algoritmo di Gauss ottenendo una matrice a scala $(S|\underline{c})$, si considera il corrispondente sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$, si vede se ha soluzioni, se ne ha una sola o infinite, e se possibile lo si risolve.

-Esempio.

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 4x+2y+z &= 0 \\ 9x+3y+z &= 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 9R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -8 & -9 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3 - 3R_2$$

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ -2y-3z &= -4 \\ z &= 3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Il sistema ha una ed una sola soluzione.

-Esempio.

$$\begin{cases} x+3y+z+u &= 4 \\ x+3y+2z+3u &= -2 \\ x+y+z+u &= -2 \\ -3x-7y-4z-5u &= 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -7 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + 3R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right) \quad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right) \quad R_4 \to R_4 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right) \quad R_4 \to R_4 + R_3$$

$$\begin{cases} x+3y+z+u &= 4 \\ -2y &= -6 \\ z+2u &= -6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema ha infinite soluzioni, che si possono ottenere ricavando la x, y, z in funzione della u.