Lezione del 08.03

Si è parlato di *spazi vettoriali* e *sottospazi*, descritti i fatti che suggeriscono le definizioni, date le definizioni, presentati esempi, provate le prime proprietà [cfr. Cap. 2 Spazi vettoriali]. Di seguito una descrizione più dettagliata.

Si è riconsiderata la struttura algebrica di $\mathbb{R}$ [cfr. Par.2.1]; si sono introdotte operazioni su $\mathbb{R}^2$ (con i loro significati geometrici), su $\mathbb{R}^n$ e $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, e se ne sono analizzate le proprietà [cfr. Par.2.2]; si è dato il concetto di *spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$, con esempi di spazi vettoriali di $n-$ple e di matrici reali, di funzioni reali di una o più variabili reali, si sono ricavate alcune proprietà generali, con una applicazione sul numero dei vettori [cfr. Par.2.3]. Si sono considerati alcuni modi naturali di immergere $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$, si è data la definizione di *sottospazio* di uno spazio vettoriale, si sono dati esempi e non-esempi in $\mathbb{R}^2$ con relativi aspetti geometrici, si è descritto il comportamento dei sottospazi sotto le operazioni insiemistiche, e si è stabilito che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ [cfr. Par. 2.4]. Di seguito una descrizione più dettagliata, con riferimenti più precisi, e ancora più estesa per le parti che non hanno riferimenti.

–1 **Numeri reali; struttura algebrica di campo**. [cfr. Par.2.1] Prima di considerare la struttura algebrica di spazio vettoriale, riconsideriamo brevemente la struttura algebrica dei numeri reali. Soprattutto, consideriamo le operazioni di somma e prodotto e ne mettiamo in evidenza le proprietà fondamentali, mostrando come altre derivino da esse.

-La somma di numeri reali è un'operazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che in entrata prende due numeri reali a, b e in uscita restituisce un numero reale $a + b$; possiede le seguenti proprietà: è associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$; è commutativa: $a + b = b + a$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$; esiste un elemento neutro $0 \in \mathbb{R}$, caratterizzato dalla proprietà: $0+b = b$ per ogni $b \in \mathbb{R}$; per ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento opposto $-a \in \mathbb{R}$, caratterizzato dalla proprietà: $a + (-a) = 0$. L'operazione di sottrazione può essere derivata dall'operazione di somma e dal passaggio all'opposto ponendo $a - b = a + (-b)$.

-Il prodotto di numeri reali è un'operazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che in entrata prende due numeri reali a, b e in uscita restituisce un numero reale ab; possiede le seguenti proprietà: è associativa: $(ab)c = a(bc)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$; è commutativa: $ab = ba$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$; esiste un elemento neutro $1 \in \mathbb{R}$, caratterizzato dalla proprietà: $1b = b$ per ogni $b \in \mathbb{R}$; per ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, esiste un elemento inverso $a^{-1} \in \mathbb{R}$, caratterizzato dalla propriet: $aa^{-1} = 1$. L'operazione di divisione può essere derivata dall'operazione di prodotto e dal passaggio all'inverso ponendo $a/b = ab^{-1}$ $(b \neq 0.)$

-Le due operazioni sono collegate dalla proprietà distributiva: $(a + b)c = ac + bc$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$.

-Diciamo *campo* un qualsiasi insieme $\mathbb{K}$ dotato di operazioni di somma e prodotto che soddisfano le proprietà sopra evidenziate. Oltre all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ sono campi anche quelli dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e dei numeri complessi $\mathbb{C}$, mentre non sono campi quelli dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e dei numeri interi $\mathbb{Z}$ (tutti con le usuali operazioni).

-In ciascuno degli esempi sopra considerati si ha che il prodotto di un numero per lo zero è uguale a zero, e viceversa se il prodotto di due numeri è zero allora uno dei due deve essere zero (legge di annullamento del prodotto). Questo fatti valgono in ogni campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Infatti. Da una parte, per ogni $a \in \mathbb{K}$ si ha che $0a$ posside la proprietà che caratterizza lo zero 0; ciò si può verificare come segue: $0a + b = 0a + 1a - 1a + b = (0+1)a - 1a + b = 1a - 1a + b = b$ (per ogni $b \in \mathbb{K}$. Dall'altra parte, se $ab = 0$ e $a \neq 0$, allora moltiplicando entrambi i membri per a^{-1} si ottiene $a^{-1}(ab) = a^{-1}0$; al primo membro si ha $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1b = b$ e al secondo mebro si ha $a^{-1}0 = 0$; dunque infine si ha $b = 0$.

–1 **Numeri reali; retta reale.**[cfr. Par.2.1] Fissati su una retta un punto origine O ed un punto unità U (distinti), esiste uno ed un solo modo di associare a ciascun numero reale r un punto P_r della retta in modo che: $P_0 = O$ e $P_1 = U$; la misura di OP_r rispetto a OU sia $|r|$ per ogni $r \in \mathbb{R}$; P_r rispetto ad O stia dalla stessa parte o dalla parte opposta di U secondo che r sia positivo o negativo. A numeri reali distinti vengono associati punti distinti, e, per la proprietà di continuità dei numeri reali, ogni punto è il punto associato a qualche numero reale. Si ha così un'identificazione fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei punti della retta.

–2 **Operazioni su** $\mathbb{R}^2$**, su** $\mathbb{R}^n$ **e** $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$**, proprietà** [cfr. Par.2.2] Come nel Par.2.2: sono state definite le operazioni di somma di due coppie ordinate di numeri reali e di prodotto di un numero reale per una coppia ordinata di numeri reali e si sono evidenziate delle proprietà di queste operazioni; fissato un sistema di riferimento nel piano, si sono rappresentate coppie ordinate di numeri reali con punti e vettori nel piano, e operazioni su coppie ordinate con operazioni sui vettori; si sono definite operazioni di somma e di moltiplicazine per numeri reali sulle $n-$ple ordinate di numeri reali, e sulle matrici di un datotipo $m \times n$.

- L'identificazione dell'insieme delle coppie ordinate di numeri reali con l'insieme dei punti del piano, e con i vettori, è stata svolta data come segue. Siano fissate nel piano una prima retta r ed una seconda retta s fra loro distinte (per semplicità si può prenderle ortogonali) e sia O il punto comune alle due rette; siano inoltre dati un punto su r e un punto su s distinti da O (per semplicità si può prenderli equidistanti da O); allora si ha una identificazione di $\mathbb{R}$ con l'insieme dei punti di r, una identificazione di $\mathbb{R}$ con l'insieme dei punti di s; per ciascuna $\underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ si hanno due rette, una retta passante per il punto A_1 associato ad a_1 su r e parallela ad s e una retta passante per il punto A_2 associato ad a_2 su s e parallela ad r, e queste rette si incontrano in punto A del piano. Si ha così una biiezione da $\mathbb{R}^2$ verso l'insieme dei punti del piano. Inoltre, a ciascun punto A del piano corrisponde il vettore $\overrightarrow{a} = OA$ con origine O e termine A. Si ha così una biiezione fra $\mathbb{R}^2$ e l'insieme dei vettori del piano aventi origine O.

3– **Spazi vettoriali** [Par. 2.3]. Definizione di spazio vettoriale, come in Par.2.3; esempi, oltre $\mathbb{R}^n$ e $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dati solo spazi di funzioni, ma un poco più in dettaglio; prime proprietà: Prop. 2.3.5 enunciata in forma parziale e dimostrata in modo ancora più parziale, se ne assegna lo studio come compito; spazio nullo e cosa deve contenere uno spazio vettoriale accanto ad un vettore non nullo, come in Def. 2.3.6 e Oss. 2.3.7 e 2.3.8.

Spazi di funzioni. Sia A un insieme, e sia $V(A,\mathbb{R}) = \{f;\ f : A \to \mathbb{R}\}$ l'insieme di tutte le funzioni da A verso $\mathbb{R}$. Per ogni $f, g : A \to \mathbb{R}$ si definisce $f + g : A \to \mathbb{R}$ ponendo $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ per ogni $x \in A$; per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $f : A \to \mathbb{R}$ si definisce $\alpha f : A \to \mathbb{R}$ ponendo $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ per ogni $x \in A$. Si verifica che con queste operazioni $V(A,\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; il vettore nullo è $\underline{0} : A \to \mathbb{R}$ definita da $\underline{0}(x) = 0$ per ogni $x \in A$; l'opposta di una $f : A \to \mathbb{R}$ è la $-f : A \to \mathbb{R}$ definita da $(-f)(x) = -f(x)$ per ogni $x \in A$.

Per $A \subseteq \mathbb{R}$ o più in generale per $A \subseteq \mathbb{R}^n$ di hanno spazi vettoriali di interesse dell'analisi matematica. Lo spazio vettoriale $V(\{1,\ldots,n\},\mathbb{R})$ si può identificare con $\mathbb{R}^n$, e lo spazio vettoriale $V(\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\},\mathbb{R})$ si può identificare con $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

4– **Sottospazi vettoriali**. [Par.2.4] Si sono considserate le immersioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ date dall'insieme $\{(x,y);\ y = 0\} = \{(r,0);\ r \in \mathbb{R}\}$ oppure più in generale da un insieme del tipo $\{(x,y);\ y = mx\} = \{(r,mr);\ r \in \mathbb{R}\}$ con $m \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fissato; si è osservato che ciascuno di questi insiemi è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalari; si è data una interpretazione geometrica di questo fatto. Si è data la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale, come in Def. 2.4.1, osservando che la condizione "diverso dal vuoto" equivale alla condizione "contiene il vettore nullo". Si sono considerati esempi e non esempi di sottospazi di $\mathbb{R}^2$, come in Es. 2.4.3 ed Oss. 2.4.7. Si è considerato l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare, e si è stabilito che tale insieme è un sottospazio se e solo se l'equazione ha termine noto nullo, in breve è omogenea. Si sono considerate le operazioni insiemistiche sui sottospazi; si è visto che in generale l'unione di due sottospazi non è un sottospazio, come in Es. 2.4.11; si è provato che l'intersezione di due (o più) sottospazi è un sottospazio, come in Prop.2.4.13. Si è stabilito che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio.

-**Esempio.** L'insieme delle soluzioni dell'equazione $2x + 3y + 5z = 0$ nelle incognite x, y, z è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Verifica. (1) $(0,0,0)$ è una soluzione in quanto $2\cdot 0+3\cdot 0+5\cdot 0 = 0$. (2) se $\underline{r} = (r_i)_1^3$ ed $\underline{s} = (s_i)_1^3$ sono due soluzioni dell'equazione, allora anche $\underline{r}+\underline{s} = (r_i+s_i)_1^3$ è una soluzione, in quanto $2(r_1+s_1)+3(r_2+s_2)+5(r_3+s_3) = 2r_1+3r_2+5r_3+2s_1+3s_2+5s_3 = 0+0 = 0$. (3) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\underline{r} = (r_i)_1^3$ è una soluzione dell'equazione, allora anche $\alpha\underline{r} = (\alpha r_i)_1^3$ è una soluzione, in quanto $2(\alpha r_1) + 3(\alpha r_2) + 5(\alpha r_3) = \alpha(2r_1 + 3r_2 + 5r_3) = \alpha 0 = 0$.

- Un'equazione lineare nelle n incognite $x_1,\ldots,x_n$ si dice *omogenea* se il suo termine noto è uguale a zero, cioè se è della forma $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Argomentando come sopra si prova che l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea in n incognite su $\mathbb{R}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Più in generale, si ha

Proposizione. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite su $\mathbb{R}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia W l'insieme delle soluzioni del sistema e sia W_i l'insieme delle soluzini della $i-$ma equazione del sistema; allora $W = \cap_{i=1}^m W_i$. Essendo ciascuna equazione lineare omogenea, ciascun W_i è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, dunque anche $W = \cap_{i=1}^m W_i$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.