II settimana - eserczi

(1) Si provi che l'operazione di somma (defìnta componente per componente) su $\mathbb{R}^2$ soddisfa le proprietà dell'operazione di somma su uno spazio vettoriale.

(2) Si provi che le operazioni di somma e prodotto per scalari (definite punto a punto) sull'insieme $V(A, R)$ delle funzioni da un isieme A verso $\mathbb{R}$ soddisfano le proprietà 5–8 delle operazioni di somma e prodotto per scalari su uno spazio vettoriale.

(3) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un'equazione nell'incognita $\underline{x}$ su V del tipo

$$\alpha \underline{x} + \underline{b} = \underline{c}$$

dove $\alpha, \underline{b}, \underline{c}$ sono elementi dati appartenenti rispettivamente a $\mathbb{R}, V, V$. Si provi che se $\alpha \neq 0$ allora l'equazione ha una ed una sola soluzione in V.

(4) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z su $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ \quad\;\; y + z = 0 \end{cases}$$

Si risolva il sistema e si utilizzi la descrizione esplicita delle soluzioni per verificare per altra via che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

(5) Esercizio 2.6.1. Si dica quali dei seguenti sottinsiemi di spazi vettoriali sono sottospazi

d) $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\}$

f) $\{(a_{ij}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) |\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$

(6) Si dica quali dei seguenti insiemi è un sottospazio dello spazio vettoriale $V(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ 5f(1) + 7f(2) = 0\}$;

b) $\{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ 5g(1) + 7g(2) = 1\}$.

(7) Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$ si dica quali proprietà, fra le tre che definiscono i sottospazi, possiede

a) $\{(x, y) |\ y = x + 1\}$;

b) $\{(x, y) |\ xy \geq 0\}$;

c) $\{(x, y) |\ x, y \in \mathbb{Z}\}$.