Lezione del 12.03

Questa lezione si riferisce al Cap.3 "Combinazioni lineari e lineare indipendenza", Par.3.1 "Combinazioni lineari e generatori".

–0 **Esempi introduttivi**

- **Esempio** Consideriamo l'equazione lineare omogenea $2x+3y = 0$ nelle incognite x, y, che ha insieme delle soluzioni

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x + 3y = 0\} = \{(x, -2/3x)|\ x \text{ variabile libera.}\}$$

Questo insieme è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$. Possiamo scrivere $(x, -2/3x) = x(1, -2/3)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, dire che le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i multpli scalari di $(1, -2/3)$ e, in breve, che lo spazio delle soluzioni è generato da $(1, -2/3)$.

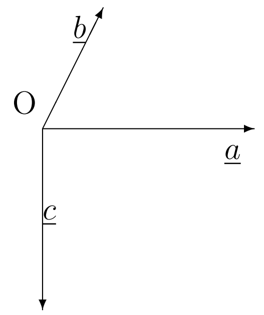
Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano (per semplicità pensiamo ortogonale monometrico), i vettori di $\mathbb{R}^2$ si possono rappresentare con punti del piano o meglio con vettori del piano applicati nell'origine O del riferimento. Allora le soluzioni dell'equazione vengono rappresentate esattamente dai punti di una retta del piano passante per O, o meglio dai vettori applicati in O che stanno su questa retta. Fra questi vettori compare il vettore $(1, -2/3)$ e possiamo apprezzare il fatto che i multipli scalari di questo vettore sono tutti e soli i vettori sulla retta. Anzi possiamo osservare che, comunque scelto un vettore non nullo sulla retta, i multipli scalari di questo vettore sono tutti e soli i vettori sulla retta.

- **Esempio** Possiamo scrivere il generico vettore (x, y) di $\mathbb{R}^2$ nella forma $(x, y) = x(1, 0)+y(0, 1)$, dire che (x, y) è la combinazione lineare di $(1, 0)$ e $(0, 1)$ con coefficienti x e y, che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $(1, 0)$ e $(0, 1)$, in breve che $(1, 0)$ e $(0, 1)$ generano $\mathbb{R}^2$.

Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano (per semplicità pensiamo ortogonale monometrico), rappresentiamo i vettori di $\mathbb{R}^2$ con vettori del piano applicati nell'origine O del riferimento. Fra questi vettori compaiono i vettore $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e possiamo apprezzare il fatto che ogni vettore del piano si può ottenere come combinazione lineare di questi due vettori. Anzi possiamo osservare che, comunque siano scelti due vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$, non su una stessa retta, ogni vettore $\underline{c}$ del piano si può ottenere come loro combinazione lineare.

Infatti: (1) proiettando $\underline{c}$ sulla retta di $\underline{a}$ parallelamente al vettore $\underline{b}$ si ottiene un vettore del tipo $\alpha\underline{a}$; (2) proiettando $\underline{c}$ sulla retta di $\underline{b}$ parallelamente al vettore $\underline{a}$ si ottiene un vettore del tipo $\beta\underline{b}$; (3) e si ha $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$.

Pe esercizio, si effettui questa decomposizione sui vettori dati nella seguente figura, e si dia una stima grezza dei coefficienti.



- **Esempio** Consideriamo l'equazione lineare omogenea $x - y + z = 0$ nelle incognite x, y, z; sappiamo che l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Possiamo risolvere l'equazione esplicitando x in funzione di y, z; otteniamo $x = y - z$ con y, z variabili libere. Dunque le soluzioni dell'equazione sono le terne del tipo $(y - z, y, z)$ $(y, z$ libere); osserviamo che

$$(y - z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1);$$

possiamo dire che le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le combinazioni lineari di $(1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$, in breve, che lo spazio delle soluzioni è generato da $(1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$.

Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano (per semplicità pensiamo ortogonale monometrico), i vettori di $\mathbb{R}^3$ si possono rappresentare con punti delo spazio o meglio con vettori dello spazio applicati nell'origine O del riferimento. Allora le soluzioni dell'equazione vengono rappresentate esattamente dai punti di un piano passante per O, o meglio dai vettori applicati in O che stanno su questo piano. Fra questi vettori compaiono i vettori $(1, 1, 0), (-1, 0, 1)$ e possiamo apprezzare il fatto che le combinazioni lineari di questi vettori sono tutti e soli i vettori sul piano. Anzi possiamo osservare che, comunque scelti due vettori non allineati sul piano, le combinazioni lineari di questi vettori sono tutti e soli i vettori sul piano.

– 1 **Definizioni** I fatti sopra descritti suggeriscono le seguenti definizioni.

- **Definizione** Il vettore *combinazione lineare* di n dati vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ di uno spazio vettoriale V con coefficienti n dati scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in $\mathbb{R}$ è il vettore di V dato dalla somma dei prodotti dei vettori dati per i corrispondenti scalari

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n.$$

Si dice che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ sono un *sistema di generatori* di V, in breve *generano* V, se ogni vettore di V si può ottenere come loro combinazine lineare.

- **Osservazione** Se $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V, e $\underline{a}$ un vettore in V, allora anche $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{a}$ è un sistema di generatori di V. Infatti: se ogni $\underline{v} \in V$ si può scrivere come

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{a}_n$$

per opportuni scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, allora $\underline{v}$ si può scrivere anche come

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{a}_n + 0\underline{a}.$$

- **Esempio** Per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, i vettori $(1,0), (0,1)$ sono un sistema di generatori; anche i vettori $(1,0), (0,1), (1,1)$ sono un sistema di generatori. Identificato $\mathbb{R}^2$ con lo spazio vettoriale dei vettori del piano applicati in un punto fissato O, si può osservare che due qualsiasi vettori dati che non stanno su una stessa retta sono un sistema di generatori. Più in generale, ogni sequenza di (due o più) vettori nella quale compaiano almeno due vettori che non stanno sulla stessa retta è un sistema di generatori. Nessun singolo vettore è un sistema di generatori.

- **Esempio** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori. Infatti, per ogni matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Esempio** Esempio ovvio nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Per ciascun intero $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indichiamo con $\underline{e}_i$ il vettore che ha la $i-$ma componente uguale a 1 e tutte le altre componenti uguali a 0. I vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$. Infatti, per ogni $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} \underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \cdots + x_n \underline{e}_n. \end{aligned}$$

- **Esempio** Esempio ovvio nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Per ogni coppia $(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ indichiamo con $E_{i,j}$ la matrice che ha l'elemento di posto (i,j) uguale a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0. Queste matrici sono un sistema di generatori di $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Infatti, per ogni $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si ha

$$A = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} E_{i,j},$$

dove a_{ij} è l'elemento di posto (i,j) in A.

- **Definizione** L'insieme dei vettori combinazioni lineari di dati vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ di uno spazio vettoriale V si dice *sottospazio generato* da $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e si indica con $\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle$; esplicitamente

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle = \{\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n | \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Se in due sequenze di vettori compaiono gli stessi vettori (magari in ordine diverso, magari ripetuti più volte in modo diverso), allora ogni vettore ottenibile come combinazione lineare dei vettori di una sequenza è anche ottenibile come combinazione lineare dei vettori dell'altra sequenza, così i sottospazi generati dalle due sequenze coincidono. In altri termini, il sottospazio generato da una sequenza di vettori dipende solo dall'insieme dei vettori che nella sequenza compaiono. Per questa ragione si parla anche di sottospazio generato da un insieme di vettori.

- **Proposizione** [cfr. Prop.3.1.5 p.56 e relativa dimostrazione]. Il sottospazio generato da un dato insieme di vettori di uno spazio vettoriale V è effettivamente un sottospazio di V, ed ogni sottospazio di V che contiene il dato insieme di vettori contiene anche il sottospazio da essi generato. In breve: ll sottospazio generato da un dato insieme di vettori di uno spazio vettoriale V è il più piccolo sottospazio di V che contiene il dato insieme di vettori.

- **Esempio** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$.

Il sottospazio $\langle(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\rangle$ è l'insieme dei vettori del tipo

$$\alpha(1,2,3)+\beta(4,5,6)+\gamma(7,8,9)$$

ottenuti assegnando ad α,β,γ valori in $\mathbb{R}$.

È dunque facile esibire vettori che appartengono a questo sottospazio; d'altro canto non è immediato stabilire se un dato vettore gli appartiene. Ad esempio $(1,1,1)\in\langle(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\rangle$ se e solo se l'equazione nelle incognite α,β,γ su $\mathbb{R}$

$$\alpha(1,2,3)+\beta(4,5,6)+\gamma(7,8,9)=(1,1,1)$$

ha qualche soluzione. Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha+4\beta+7\gamma=1\\ 2\alpha+5\beta+8\gamma=1\\ 3\alpha+6\beta+9\gamma=1 \end{cases},$$

che a sua volta equivale al sistema a scala

$$\begin{cases} \alpha+4\beta+7\gamma=1\\ \qquad 3\beta+6\gamma=1 \end{cases},$$

che ha soluzioni. Dunque $(1,1,1)\in\langle(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\rangle$.

Ci chiediamo ora se i vettori $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ generano $\mathbb{R}^3$; in altri termini, se il sottospazio da essi generato è $\mathbb{R}^3$. Indichiamo con (p,q,r) un qualsiasi vettore in $\mathbb{R}^3$. Si ha $(p,q,r)\in\langle(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\rangle$ se e solo se l'equazione nelle incognite α,β,γ su $\mathbb{R}$

$$\alpha(1,2,3)+\beta(4,5,6)+\gamma(7,8,9)=(p,q,r)$$

ha qualche soluzione. Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha+4\beta+7\gamma=p\\ 2\alpha+5\beta+8\gamma=q\\ 3\alpha+6\beta+9\gamma=r \end{cases},$$

che a sua volta equivale al sistema a scala

$$\begin{cases} \alpha+4\beta+7\gamma &=& p\\ \qquad 3\beta+6\gamma &=& 2p-q\\ \qquad\qquad 0 &=& p-2q+r \end{cases},$$

che ha soluzioni solo per $p-2q+r=0$. Dunque $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ non generano $\mathbb{R}^3$.

– 2 **Ridondanza** Un sistema di generatori di unospazio vettoriale è tanto più interessante quanto più è "piccolo".

- **Esempio** Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ dato dal sottospazio $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\underline{a} = (1, 2, 3)$, $\underline{b} = (4, 5, 6)$, $\underline{c} = (7, 8, 9)$. Chiaramente, questi vettori sono un sistema di generatori di V. Si ha che $\underline{b}$ si può scrivere come combinazione lineare di $\underline{a}$ e $\underline{c}$

$$\underline{b} = 1/2\ \underline{a} + 1/2\ \underline{c};$$

dunque ogni combinazione lineare dei tre vettori

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$$

si può scrivere come combinazione lineare di $\underline{a}$ e $\underline{c}$

$$(\alpha + \beta/2)\underline{a} + (\gamma + \beta/2)\underline{c}.$$

Ciò significa che $V = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$; in altri termini, $\underline{a}$ $\underline{c}$ è un sistema di generatori di V.

In generale, vale la seguente

-**Proposizione** [cfr. Prop.3.1.8, p.59, e relativa dimostrazione] Siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Se $\underline{w}$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, allora $\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle$; viceversa, se $\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle$ allora $\underline{w}$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$.

– 3 **Combinazioni lineari, sistemi, matrici** Il problema di determinare le combinazioni lineari di dati vettori di uno spazio $\mathbb{R}^n$ che siano uguali ad un dato vettore di $\mathbb{R}^n$ si traduce in un sistema lineare, e i vettori in questione compaiono come colonne nella matrice di questo sistema.

- **Esempio** Cerchiamo le combinazioni lineari di due dati vettori $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ di $\mathbb{R}^3$ che siano uguale ad un dato vettore $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo dunque l'equazione nelle incognite α, β

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3) = (p_1, p_2, p_3).$$

Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 = p_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 = p_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 = p_3 \end{cases},$$

e questo sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_2 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{a} & \underline{b} & \underline{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

dove abbiamo identificato i vettori con matrici colonna.

- bf Fatto In generale, i coefficienti delle combinazioni lineari di m dati vettori $\underline{a}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$ ... $\underline{a}_m = (a_{1m}, \ldots, a_{nm})$ di $\mathbb{R}^n$ che sono uguali ad un dato vettore $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ di $\mathbb{R}^n$:sono le soluzioni dell'equazione nelle m incognite $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_m\underline{a}_m = \underline{b}.$$

Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1m}\alpha_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + \cdots + a_{nm}\alpha_m = b_n \end{cases},$$

e questo sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_m & \underline{b} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

dove abbiamo identificato i vettori con matrici colonna.