Lezione del 15.03

Questa lezione si riferisce al Cap.3 "Combinazioni lineari e lineare indipendenza", Par.3.2 "Indipendenza lineare".

0– **Introduzione** Si è considerato il modo in cui normalmente si pensa ad uno, due, o tre vettori applicati in un punto fissato O dello spazio. Si è osservato che si pensa a:

(1) un vettore non ridotto ad O; (2) due vettori che non stanno su una stessa retta; (3) tre vettori che non stanno su uno stesso piano.

Si sono descritte anche le altre possibilità

(1') un vettore ridotto ad O; (2') un vettore non ridotto ad O, ed un altro che sta sulla sua stessa retta; oppure, ... (3') due vettori che non stanno su una stessa retta, ed un terzo che sta sul loro stesso piano; oppure, ...

–1 **Prima definizione di indipendenza lineare** Si è espresso il modo in cui normalmente si pensa ad uno, due, o tre vettori applicati in un punto fissato O dello spazio, nel linguaggio dell'algebra lineare, ottenendo:

(1) un vettore non nullo; (2) due vettori nessuno dei quali è multiplo (con coefficiente reale) dell'altro; (3) tre vettori nessuno dei quali è combinazione lineare (con coefficienti reali) degli altri due.

A partire da queste considerazioni si è data la prima defnzione della proprietà di indipendenza lineare:

**Definizione ($\mathcal{I}$.1)** Sia $V$ uno spazio vettoriale, e siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ vettori di $V$.

$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se nessun $\underline{v}_i$ si può ottenere come combinazione lineare degli altri $\underline{v}_j$ $(j \neq i)$; altrimenti, se almeno un $\underline{v}_i$ si può ottenere come combinazione lineare degli altri $\underline{v}_j$ $(j \neq i)$, si dice che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono *linearmente dipendenti.*

Un singolo vettore $\underline{v}$ si dice linearmente indipendente o linearmente dipendente secondo che sia diverso o uguale al vettore nullo $\underline{0}$. Per convenzione, si dice che la sequenza vuota (nessun vettore) è linearmente indipendente.

Si sono esposti i seguenti esempi ovvi, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

(1) $(1,0,0)$ è linearmente indipendente;

(2) $(1,0,0),(0,1,0)$ sono linearmente indipendenti ( non esiste alcun $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $(1,0,0) = \alpha(0,1,0)$ e non esiste alcun $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $(0,1,0) = \alpha(1,0,0)$ )

(3) $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ sono linearmente indipendenti ( non esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $(1,0,0) = \alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)$; non esistono ... )

(2') per ogni $h \in \mathbb{R}$ fissato, $(1,0,0),(h,0,0)$ sono linearmente dipendenti; ...

(3') per ogni $h,k \in \mathbb{R}$ fissati, $(1,0,0),(0,1,0),(h,k,0)$ sono linearmente dipendenti;

Si ha l'impressione (corretta) che in $\mathbb{R}^3$ non possano esistere più di 3 vettori linearmente indipendenti. Lo proveremo più avanti.

Una prima proprietà dell'indipendenza lineare.

**Osservazione** A partire dalla descrizione geometrica iniziale sui vettori applicati in un punto O dello spazio, si è portati a pensare che: se tre vettori sono linearmente indipendenti, allora anche due qualunque di essi sono linearmente indipendenti; equivalentemente, se fra tre vettori ce ne sono due linearmente dipendenti, allora anche i tre vettori sono linearmente dipendenti. Questa impressione è vera. Infatti: considerati i due vettori linearmente dipendenti, si ha che fra di essi ce ne è uno che si può scrivere come multiplo dell'altro; indicati rispettivamente questi vettori come $\underline{a}$ e $\underline{b}$, si ha dunque $\underline{a} = \beta\underline{b}$ per qualche $\beta \in \mathbb{R}$; indicato con $\underline{c}$ il terzo vettore, si ha anche $\underline{a} = \beta\underline{b} + 0\underline{c}$; dunque c'è uno dei tre vettori che si può scrivere come combinazione lineare degli altri due, cioè i tre vettori sono linearmente dipendenti. Più in generale si ha

**Proposizione.** Date in uno spazio vettoriale una sequenza di vettori ed una sua sottosequenza si ha: se la sequenza è linearmente indipendente allora anche la sottosequenza è linearmente indipendente; equivalentemente, se la sottosequenza è linearmente dipendente allora anche la sequenza è linearmente dipendente.

Non diamo la dimostrazione. [1]

Esempio ovvio nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Per ciascun intero $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ indichiamo con $\underline{e}_i$ il vettore che ha la $i-$ma componente uguale a 1 e tutte le altre componenti uguali a 0. Si ha che la sequenza $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ è linearmente indipendente. Infatti, per ciascun indice $i^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ l'uguaglianza

$$\underline{e}_{i^*} = \sum_{i \neq i^*} \alpha_i \underline{e}_i \qquad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

non è possibile, in quanto uguagliando le componenti $i^*-$ma ai due membri si ottiene

$$1 = \sum_{i \neq i_*} \alpha_i 0 = 0.$$

-Esempio ovvio nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Dall'esempio precedente, per la proposizione di sopra, si ha che ogni sottosequenza della sequenza $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ è linearmente indipendente.

Si ha l'impressione (corretta) che in $\mathbb{R}^n$ non possano esistere più di n vettori linearmente indipendenti. Lo proveremo più avanti.

[1] Un enunciato più formale. Siano $\underline{v}_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ vettori di uno spazio vettoriale $V$ e sia $A \subseteq \{1, \dots, n\}$. Se $\underline{v}_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ sono linearmente indipendenti, allora anche $\underline{v}_i$ $(i \in A)$ sono linearmente indipendenti; equivalentemente, se $\underline{v}_i$ $(i \in A)$ sono linearmente dipendenti, allora anche $\underline{v}_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ sono linearmente dipendenti.
Una dimostrazione della seconda affermazione. Esiste un $i_0 \in A$ tale che si possa scrivere

$$\underline{v}_{i_0} = \sum_{\substack{i \in A \\ i \neq i_0}} \alpha_i \underline{v}_i$$

dunque si può anche scrivere

$$\underline{v}_{i_0} = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ i \neq i_0}} \beta_i \underline{v}_i$$

dove $\beta_i = \alpha_i$ per $i \in A$ e $\beta_i = 0$ per $i \notin A$.

–1/2 **Intermezzo**. Nel punto precedente si è data una prima definizione di indipendenza lineare, si sono dati alcuni esempi ovvi, e ci si è posta una questione sul massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$. Nel punto successivo si dà una seconda definizione di indipendenza lineare, che è equivalente alla prima, si riconsidera qualche esempio ovvio, e si prova che il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ è $n$.

–2 **Seconda definizione di indipendenza lineare** Si è riconsiderato il modo in cui normalmente si pensano dei vettori applicati in un punto fissato O dello spazio, e si è osservato che:

(1) un vettore $\underline{a}$ non è ridotto ad un solo punto se e solo se l'equazione $\alpha\underline{a} = \underline{0}$ ha l'unica soluzione $\alpha = 0$; (2) due vettori $\underline{a}, \underline{b}$ non stanno su una stessa retta se e solo se l'equazione $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{0}$ ha l'unica soluzione $\alpha = \beta = 0$.

A partire da queste considerazioni si è data la seconda definzione della proprietà di indipendenza lineare:

**Definizione** ($\mathcal{I}$.2) Sia $V$ uno spazio vettoriale, e siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ vettori di $V$.

$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se l'equazione

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0}$$

nelle incognite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ha l'unica soluzione $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$; altrimenti, se l'equazione

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0}$$

nelle incognite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ha qualche soluzione con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli, si dice che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono *linearmente dipendenti*.

Per convenzione, si dice che la sequenza vuota (nessun vettore) è linearmente indipendente.

- **Esempi** Alcuni esempi ovvi di vettori linearmente indipendenti o dipendenti in $\mathbb{R}^3$.

(3) I vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti; infatti l'equazione

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma$ equivale all'equazione $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ che ha solo la soluzione $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(2') i vettori $(1, 0, 0), (2, 0, 0)$ sono linearmente dipendenti; infatti l'equazione

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(2, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

ha tra le altre la soluzione $\alpha = -2$, $\beta = 1$.

(3') i vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 3, 0)$ sono linearmente dipendenti; infatti l'equazione

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(2, 3, 0) = (0, 0, 0)$$

ha tra le altre la soluzione $\alpha = -2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$.

- **Esempio**. I vettori $\underline{e}_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti. Infatti l'equazione

$$x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + \cdots + x_n\underline{e}_n = \underline{0}$$

nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$ esplicitamente è

$$x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,0,\ldots,1) = (0,0,\ldots,0),$$

che equivale alla

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0,0,\ldots,0),$$

che a sua volta prge $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

**Proposizione** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, ciascuna sequenza di più di $n$ vettori è linearmente dipendente.

Dimostrazione. Siano dati $m$ vettori $\underline{a}_i$ $(i \in \{1,\ldots,m\})$ in $\mathbb{R}^n$, con $m > n$. Consiseriamo l'equazione

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_m\underline{a}_m = \underline{0}$$

nelle incognite $x_1, \ldots, x_m$. Questa equazione equivale al sistema delle $n$ equazioni lineari omogenee nelle stesse $m$ incognite, ottenute uguagliando ciascuna delle $n$ componenti del vettore al primo membro alla corrispondente componente del vettore al secondo membro, che è sempre 0. Questo sistema si può scrivere come

$$A\underline{x} = \underline{0},$$

dove $A$ è la matrice $n \times m$ che come colonne i vettori $\underline{a}_i$. Applicando alla matrice completa del sistema $(A|\ \underline{0})$ l'algoritmo di Gauss, si ottiene una matrice a scala $(S|\ \underline{0})$, dove $S$ è una matrice $n \times m$ a scala. A questa matrice corrisponde il sistema

$$S\underline{x} = \underline{0},$$

equivalente al sistema iniziale. Il rango per righe $rr(S)$ di $S$ è minore o uguale del numero delle righe di $S$ che è $n$, il numero delle incognite è $m$, e per ipotesi $n < m$; dunque il sistema ha infinite soluzioni. Dunque l'equazione

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_m\underline{a}_m = \underline{0}$$

nelle incognite $x_1, \ldots, x_m$ ha infinite soluzioni, in particolare ha qualche soluzione diversa dalla soluzione banale $x_1 = \cdots = x_m = 0$.

– 3 **Equivalenza fra le due definizioni**. Le due defnzioni di indipendenza lineare date sono equivalenti, nel senso che una sequenza di vettori è linearmente indipendente nel senso della prima defnzione se e solo se è linearmente indipendente nel senso della seconda defnzione [cfr. Prop.3.2.4, p.63].

Di seguito consideriamo il problema di stabilire se dati vettori sono linearmente indipendenti; nel caso in cui si trova che i vettori sono linearmente dipendenti, mostriamo come da informazioni più fini collegate ad una defnzione si ottengono informazioni più fini collegate all'altra defnzione.

- **Esercizio**. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti

$$(2,1,1),\ (3,3,1),\ (6,2,2).$$

Osserviamo che nessuno dei tre vettori è multiplo scalare di un altro; non è però chiaro se ce ne sia uno dei tre che è combinazione lineare degli altri due. Usiamo la seconda defnzione. Consideriamo l'equazione

$$\alpha(2,1,1) + \beta(3,3,1) + \gamma(6,2,2) = (0,0,0)$$

in $\alpha, \beta, \gamma$; questa equazione equivale al sistema lineare che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right);$$

questa matrice si può trasformare tramite operazioni elementari nella matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right);$$

questa matrice è la matrice completa di una sistema che ha solo la soluzione $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dunque i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.

- **Esercizio**. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti

$$(1, 0, 1, 4), \ (2, 1, 0, 6), \ (1, -2, 5, 8).$$

Usiamo la prima definizione. Ci chiediamo se il terzo vettore è una combinazione lneare dei primi due, cioè se esistono $\alpha, \beta$ tali che

$$\alpha(1, 0, 1, 4) + \beta(2, 1, 0, 6) = (1, -2, 5, 8);$$

osservando le seconde componenti si ha $\beta = -2$ e osservando le terze componenti si ha $\alpha = 5$; dunque l'unica possibilità è

$$5(1, 0, 1, 4) - 2(2, 1, 0, 6) = (1, -2, 5, 8);$$

questa uguaglianza è vera, dunque i vettori sono linearmente dipendenti.

( Osserviamo che, portando tutti i vettori al primo membro, si ha

$$5(1, 0, 1, 4) - 2(2, 1, 0, 6) - (1, -2, 5, 8) = (0, 0, 0);$$

dunque l'equazione in $\alpha, \beta, \gamma$

$$\alpha(1, 0, 1, 4) + \beta(2, 1, 0, 6) + \gamma(1, -2, 5, 8) = (0, 0, 0)$$

ha qualche soluzione diversa dalla soluzione $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ciò prova che i tre vettori sono linearmente dipendenti secondo la seconda definizione ).

- **Esercizio**. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti

$$(1, 2, 4), \ (1, 3, 9), \ (-2, -2, 2).$$

Usiamo la seconda definizione. Consideriamo l'equazione in $\alpha, \beta, \gamma$

$$\alpha(1, 2, 4) + \beta(1, 3, 9) + \gamma(-2, -2, 2) = (0, 0, 0).$$

Questa equazione equivale al sistema che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 \end{array}\right);$$

questa matrice si può trasformare tramite operazioni elementari nella matrice a scala

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

questa matrice è la matrice completa di un sistema che ha infinite soluzioni. Dunque ha infinite soluzioni l'equazione

$$\alpha(1,2,4) + \beta(1,3,9) + \gamma(-2,-2,2) = (0,0,0),$$

e i vettori dati sono linearmente dipendenti.

( Risolvendo il sistema si ottiene fra le altre la soluzione $\alpha = 4$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$; dunque

$$4(1,2,4) - 2(1,3,9) + (-2,-2,2) = (0,0,0).$$

Da questa uguaglianza si può ricavare

$$(-2,-2,2) = -4(1,2,4) + 2(1,3,9),$$

e ciò prova che i vettori dati sono linearmente dipendenti anche secondo la prima definizione. )

– 4 **Osservazione** Se in una sequenza di vettori c'è un vettore che compare più di una volta, allora la sequenza è linearmente dipendente. Se in due sequenze di vettori, prive di ripetizioni, compaiono gli stessi vettori (magari in ordini diversi), allora una sequenza è linearmente indipendete se e solo se l'altra sequenza è linearmente indipendente. In questo senso si può parlare di indipendenza lineare di un insieme di vettori.