Lezione del 19.03

Questa lezione si riferisce al Cap.4 "Basi e dimensione", Par.4.1 "Base ed esempi".

0 – **Introduzione**. L'insieme dei vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ genera $\mathbb{R}^2$ ed è linearmente indipendente. Ogni vettore (x,y) di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere come combinazione lineare $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ di $(1,0)$ e $(0,1)$; osserviamo che le componenti del vettore compaiono come coefficienti della combinazione lineare.

Identificati i vettori di $\mathbb{R}^2$ coi vettori applicati in un punto fissato O del piano, si vede che un insieme di due vettori $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$ che non stanno su una stessa retta per O genera $\mathbb{R}^2$ ed è linearmente indipendente. Ogni vettore $\underline{x}$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

$$\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2$$

di $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$. Gli scalari x_1 e x_2 si dicono *coordinate* di $\underline{x}$ rispetto a $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$.

– 1 **Definizione** [cfr. Def. 4.1.3 p.75] Un sottinsieme finito $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ di uno spazio vettoriale V di dice *base* di V se $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ genera V ed è linearmente indipendente.

Una base di uno spazio vettoriale permette di assegnare delle coordinate ai vettori, nel senso della seguente

Proposizione [cfr. Th.4.2.8 p.82 e relativa dimostrazione] Sia $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora ogni vettore $\underline{v} \in V$ si può scrivere in uno ed un solo modo come

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n \qquad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Per ciascun $i = 1, \ldots, n$ lo scalare x_i si dice *coordinata* del vettore $\underline{v}$ rispetto ai vettore $\underline{v}_i$ della base.

- **Esempio** Sia n un numero intero positivo fissato. Per ciascun intero $i = 1, 2, \ldots, n$ indichiamo con

$$\underline{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 1)$$

il vettore che ha la $i-$ma componente uguale a 1 e tutte le altre componenti uguali a 0. L'insieme $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ è una base, detta *base canonica* di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + \cdots + x_n\underline{e}_n;$$

dunque la componente x_i di $\underline{x}$ coincide con la coordinata di $\underline{x}$ rispetto al vettore $\underline{e}_i$ della base canonica.

- **Esempio** Siano m, n interi positivi fissati. Per ogni coppia (i, j) con $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ indichiamo con $E_{i,j}$ la matrice che ha l'elemento di posto (i, j) uguale a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0. L'insieme $\{E_{11}, \ldots, E_{1,n}, \ldots, E_{m,n}\}$ è una base, detta *base canonica*, di $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Per ogni matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, si ha

$$A = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} E_{ij};$$

dunque l'elemento a_{ij} di posto (i, j) di A coincide con la coordinata di A rispetto alla matrice E_{ij} della base canonica.

- **Esempio** In $\mathbb{R}^3$ condieriamo i vettori $(1, -1, 0), (1, 0, -1), (3, -1, -2)$ e il sottospazio V da essi generato. L'insieme $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (3, -1, -2)\}$ ovviamente genera V, ma non è linearmente indipendente, in quanto $(3, -1, -2) = (1, -1, 0) + 2(1, 0, -1)$.

L'insieme $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ genera ancora V, e chiaramente è linearmente indipendente, dunque è una base di V. Le coordinate di $(3, -1, -2)$ rispetto ai vettori $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$ sono 1 e 2.

- **Esempio** In $\mathbb{R}^3$ consieriamo il sottospazio V dato delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$x - 2y + 3z = 0.$$

La soluzione generale dell'equazione è data da

$$(2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1), \quad y, z \text{ variabili libere.}$$

L'insieme $\{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$ chiaramente genera V, e si prova facilmente che è linearmente indipendente, dunque è una base di V. Osserviamo che per ogni vettore di V, la sua seconda e terza componente sono le sue coordinate rispetto a $(2, 1, 0)$ e $(-3, 0, 1)$.

–**Nota sullo spazio nullo** Risulta utile definire il sottospazio di uno spazio V generato da un insieme vuoto di vettori come il sottospazio $\{\underline{0}\}$ di V ridotto al solo vettore nullo. Risulta anche utile dire per definizione che l'insieme vuoto è indipendente. Ne segue che lo spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$ ha una base, data proprio dall'insieme vuoto.

–2 **Esistenza di basi**. Abbiamo definito base un di uno spazio vettoriale V come un sottinsieme finito che genera V ed è linearmente indipendente. Uno spazio vettoriale V si dice *finitamente generato* se esiste un sottinsieme finito di V che genera V. Dunque, per la definizione data, uno spazio vettoriale può possedere una base solo se è finitamente generato. Questa è l'unica condizione, vale infatti il

Teorema [cfr. Prop.4.1.2 e Prop.4.1.6] Ciascun spazio vettoriale V finitamente generato possiede una base. Di più: ogni insieme finito di generatori di V contiene una base di V.

Dimostrazione. Sia A un insieme finito di m generatori di V. Se A è linearmente indipendente, allora A è una base di V. Sia A sia linearmente dipendente; allora esiste un vettore di A, che indichiamo con $\underline{v}_m$, che è combinazione lineare degli altri vettori di A; togliendo ad A il vettore $\underline{v}_m$ si ottiene un insieme A' di $m - 1$ vettori che genera ancora V. Se A' è linearmente indipendente, allora è una base di V. Altrimenti si procede come sopra. Dopo al più m passi si trova una base di V.

– 3 **Una proprietà degli insiemi linearmente indipendenti**. Supponiamo che sia dato un insieme linearmente indipendente in uno spazio vettoriale e di volere aggiungere a tale insieme un nuovo vettore in modo da avere ancora un insieme linearmente indipendente; chiaramente il nuovo vettore non dovrà essere combinazione lineare dei vettori dell'insieme dato. Si prova che questa è l'unica accortezza da avere

Proposizione Sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ un insieme linearmente indipendente e $\underline{v}$ in uno spazio vettoriale V. L'insieme $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}\}$ è linearmente indipendente se e solo se $\underline{v}$ non è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

Dimostrazione Proviamo che se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è linearmente indipendente e $\underline{v}$ non è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, allora $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}\}$ è linearmente indipendente. Consideriamo un'uguaglianza

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n + \alpha\underline{v} = \underline{0},$$

dove α_i e α sono scalari; osserviamo che se fosse $\alpha \neq 0$ allora potremmo ricavare $\underline{v}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, contro l'ipotesi; dunque deve essere $\alpha = 0$ e l'uguaglianza diviene

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0};$$

per ipotesi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti, dunque $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. In definitiva, abbiamo provato che $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha = 0$.

– 4 **Costruzioni ideali di basi** Sopra si è dato un procedimento ideale che a partire da un insieme finito A di generatori di uno spazio vettoriale V porta a costruire una base B di V contenuta in A.

Di seguito si descrive un procedimento ideale che a partire da un insieme linearmente indipendente finito I e da un insieme finito A di generatori di uno spazio vettoriale V porta a costruire una base B di V contenente I e contenuta in $I \cup A$.

Se ogni vettore in A è combinazione lineare dei vettori di I, allora essendo A un insieme generatore di V, si ha che anche I è un insieme generatore di V e quindi I è una base di V.

Se esiste un $\underline{v} \in A$ che non è combinazione lineare dei vettori di I, allora per la proposizione di sopra aggiungendo ad I il vettore $\underline{v}$ si ottiene ancora un insieme I' linearmente indipendente. Si ripete allora il primo passo.

Poichè A è finito e ad ogni passo si aggiungono ad I vettori diversi di A, dopo un numero finito di passi si ottiene una base di V.

In particolare, dalle due costruzioni segue che in uno spazio vettoriale finitamente generato V

(1) ogni insieme di generatori finito di V contiene una base di V;

(2) ogni insieme linearmente indipendente finito di V è contenuto in una base di V.