Lezione del 22.03

Questa lezione si riferisce al Cap.4 "Basi e dimensione", Par.4.2 "Il concetto di dimensione".

–1 **Dimensione** Identificati i vettori di $\mathbb{R}^2$ con i vettori del piano applicati in un punto fissato O, si può vedere che: un singolo vettore può essere linearmente indipendente ma non può generare $\mathbb{R}^2$; due vettori possono essere simultaneamente linearmente indipendenti e generare $\mathbb{R}^2$; tre vettori possono generare $\mathbb{R}^2$ ma non possono essere linearmente indipendenti.

Abbiamo enunciato e dimostrato in precedenza che ciascun insieme linearmente indipendente contenuto in $\mathbb{R}^n$ ha al più n vettori [cfr. Lez.V punto 2]. Più in generale, si può provare il

Teorema[cfr. Th.4.2.1 p.78, prima parte] In ciascun spazio vettoriale finitamente generato, il numero di vettori di un qualsiasi insieme linearmente indipendente è minore o uguale al numero dei vettori in una qualsiasi base. In altri termini: sia $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$ un sottinsieme linearmente indipendente di V, allora $m \leq n$.

Questo teorema ha un'immediata importante conseguenza

Proposizione [cfr. Prop.4.2.2] Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di vettori.

Dimostrazione Siano $B = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$ e $C = \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n\}$ due basi di uno spazio vettoriale V. Da una parte, dal fatto che B è linearmente indipendente e C è una base di V segue per il teorema di sopra che $m \leq n$. Dall'altra parte, dal fatto che B è una base di V e C è linearmente indipendente segue per il teorema di sopra che $m \geq n$. Dunque $m = n$.

Dunque si può dare la seguente

Definizione [cfr. Def. 4.2.3] Si dice *dimensione* di uno spazio vettoriale finitamente generato V e si indica con $\dim(V)$ il numero di vettori in una qualsiasi base di V.

Per ciascun intero positivo n fissato, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ha la base canonica $\{\underline{e}_i |\ i = 1, \ldots, n\}$ dunque $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n, in simboli $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Per ciascun intero positivo n fissato, lo spazio vettoriale $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ ha la base canonica $\{E_{ij} |\ i = 1, \ldots, m\ j = 1, \ldots, n\}$ dunque $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ha dimensione mn, in simboli $\dim(\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$.

Esempio Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ consideriamo il sottospazio W generato dai vettori

$$(1, -1, 0, 0),\ (1, 0, -1, 0),\ (1, 0, 0, -1),\ (0, 1, -1, 0)$$

Questi vettori sono linearmente dipendenti, in quanto

$$(0, 1, -1, 0) = -(1, -1, 0, 0) + (1, 0, -1, 0);$$

W è dunque il sottospazio generato dai vettori

$$W = \langle (1, -1, 0, 0),\ (1, 0, -1, 0),\ (1, 0, 0, -1)\rangle;$$

questi vettori son linearmente indipendenti (lo si verifichi), dunque l'insieme di questi vettori è una base di W e $\dim(W) = 3$.

Esempio Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ consideriamo il sottospazio W costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z, t

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 0 \\ \qquad\qquad\ \ z - 2t = 0 \end{cases}$$

La soluzione generale del sistema è data da

$$(2y - 2t, y, -2t, t) = y(2, 1, 0, 0) + t(-2, 0, -2, 1) \qquad (y, t \text{ variabili libere});$$

dunque i vettori $(2, 1, 0, 0)$ e $(-2, 0, -2, 1)$ generano W; questi vettori sono anche linearmente indipendenti, dunque formano una base di W; si ha dunque $\dim(W) = 2$.

–2 **Insiemi aventi tanti vettori quanti ne ha una base**. Identificati i vettori di $\mathbb{R}^2$ con i vettori del piano applicati in un punto fissato O, abbiamo visto che per due vettori le seguenti condizioni son equivalenti: (1) i due vettori generano $\mathbb{R}^2$; (2) i due vettori non stanno su una stessa retta per O; (3) i due vettori sono linearmente indipendenti. In generale, si ha

Proposizione [cfr. Prop.4.2.6 p.81] Sia A un insieme di n vettori in uno spazio vettoriale V di dimensione n. Le seguenti condizioni sono equivalenti

(1) A genera V;

(2) A è una base di V;

(3) A è linearmente indipendente.

Dimostrazione. Per definizione, la (2) implica sia la (1) che la (3). Proviamo che la (1) implica la (2). Supponiamo per assurdo che A generi V ma non sia una base di V; allora A sarebbe linearmente dipendente, ed A conterrebbe propriamente una base B di V, la quale avrebbe un numero di vettori $< n$, contro il fatto che la dimensione di V è n. Proviamo che la (3) implica la (2). Supponiamo per assurdo che A sia linearmente indipendente ma non sia una base di V; allora A non genererebbe V, ed A sarebbe contenuto propriamente in una base C di V, la quale avrebbe un numero di vettori $> n$, contro il fatto la dimensione di V è n.

3– **Esercizio** Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si stabilisca se è una base di $\mathbb{R}^3$

$$\{(1, 2, 3),\ (2, 3, 4)\}$$
$$\{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (2, 3, 1)\}, \quad \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (2, 3, 2)\}$$
$$\{(1, 2, 4),\ (2, 4, 7),\ (3, 6, 10),\ (4, 8, 13)\}$$

Solo i sottinsiemi costituiti da tre vettori possono essere basi di $\mathbb{R}^3$ (in quanto $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3).

Consideriamo l'insieme $\{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,1)\}$ e ci chiediamo se è linearmente indipendente. Consideriamo le combinazioni lineari dei tre vettori tali che $\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(2,3,1)=(0,0,0)$; questa equazione equivale al sistema $\begin{cases} \alpha+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases}$ che ha infinite soluzioni (lo si verifichi); dunque esiste qualche combinazione lineare dei tre vettori tale che $\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(2,3,1)=(0,0,0)$ con qualche coefficente diverso da 0. L'insieme $\{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,1)\}$ è linearmente dipendente. Non è una base di $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo l'insieme $\{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,2)\}$ e ci chiediamo se è linearmente indipendente. Consideriamo le combinazioni lineari dei tre vettori tali che $\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(2,3,2)=(0,0,0)$; questa equazione equivale al sistema $\begin{cases} \alpha+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ \beta+2\gamma=0 \end{cases}$ che ha solo la soluzione $(0,0,0)$ (lo si verifichi); dunque l'unica combinazione lineare dei tre vettori tale che $\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(2,3,2)=(0,0,0)$ è quella con $\alpha=\beta=\gamma=0$. L'insieme di 3 vettori $\{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,2)\}$ è linearmente indipendente nello spazio vettoriale 3-dimensionale $\mathbb{R}^3$, dunque per il teorema di sopra è una base di $\mathbb{R}^3$.

4 – **Esercizio** Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si costruisca se possibile una base di $\mathbb{R}^3$ che sia contenuta in esso oppure lo contenga.

$\{(1,2,0),\ (2,1,0)\}, \quad \{(10,14,18),\ (15,21,27)\}, \quad \{(1,2,0),\ (1,0,2),\ (0,1,2),\ (2,1,0)\}.$

L'insieme $\{(1,2,0),\ (2,1,0)\}$ è linearmente indipendente, dunque è contenuto in una base di $\mathbb{R}^3$. Si può costruire una tale base aggiungendo all'insieme qualche vettore preso dalla base canonica $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$. L'insieme $\{(1,2,0),\ (2,1,0),\ (1,0,0)\}$ non genera $\mathbb{R}^3$ (lo si motivi), lo stesso vale per l'insieme $\{(1,2,0),\ (2,1,0),\ (0,1,0)\}$. L'insieme $\{(1,2,0),\ (2,1,0),\ (0,0,1)\}$ è linearmente indipendente (in quanto i primi due vettori sono linearmente indipendenti e il terzo non è una loro combinazione lineare). Questo insieme di 3 vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale 3-dimensionale $\mathbb{R}^3$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

L'insieme $\{(10,14,18),\ (15,21,27)\}$ è linearmente dipendente (lo si verifichi), dunque ogni sottinsieme di $\mathbb{R}^3$ che lo contenga è linearmente dipendente. Non è contenuto in alcuna base di $\mathbb{R}^3$.

L'insieme $\{(1,2,0),\ (1,0,2),\ (0,1,2),\ (2,1,0)\}$. contiene una base di $\mathbb{R}^3$ solo solo se genera $\mathbb{R}^3$; viceversa, se genera $\mathbb{R}^3$ allora contiene una base di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo dunque le scritture di un qualsiasi vettore (p,q,r) di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare

$$\alpha(1,2,0)+\beta(1,0,2)+\gamma(0,1,2)+\delta(2,1,0)=(p,q,r);$$

questa uguaglianza equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\delta &= p \\ 2\alpha+\gamma+\delta &= q \\ 2\beta+2\gamma &= r \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & p \\ 2 & 0 & 1 & 1 & q \\ 0 & 2 & 2 & 0 & r \end{array}\right)$$

che equivale al sistema a scala

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\delta &= p \\ -2\beta+\gamma-3\delta &= q-2p \\ 3\gamma-3\delta &= r+q-2p \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & 0 & 2 & p \\ 0 & -2 & 1 & -3 & q-2p \\ 0 & 0 & 3 & -3 & r+q-2p \end{array}\right);$$

per ogni p, q, r questo sistema ha soluzione; dunque ogni vettore (p, q, r) di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come combinazione lineare

$$\alpha(1,2,0)+\beta(1,0,2)+\gamma(0,1,2)+\delta(2,1,0)=(p,q,r),$$

per opportuni valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che dipendono da p, q, r. L'insieme $\{(1,2,0),\ (1,0,2),\ (0,1,2),\ (2,1,0)\}$ genera $\mathbb{R}^3$, e dunque contiene una base di $\mathbb{R}^3$. Cerchiamo uno dei quattro vettori che sia combinazione lineare degli altri. Consideriamo le combinazioni lineari dei quattro vettori che sono uguali al vettore nullo

$$\alpha(1,2,0)+\beta(1,0,2)+\gamma(0,1,2)+\delta(2,1,0)=(0,0,0);$$

per quanto visto sopra, questa uguaglianza equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\delta &= 0 \\ -2\beta+\gamma-3\delta &= 0 \\ 3\gamma-3\delta &= 0 \end{cases}$$

che ha soluzione generale $(-\delta, \delta, \delta, \delta) = \delta(-1, -1, 1, 1)$ con δ variabile libera; dunque si ha

$$-(1,2,0)-(1,0,2)+(0,1,2)+(2,1,0)=(0,0,0).$$

Da questa relazione segue che ciascuno dei quattro vettori si può ottenere come combinazine lineare degli altri. Togliendo il quarto vettore, otteniamo l'insieme $\{(1,2,0),$ $(1,0,2), (0,1,2)\}$. Questo insieme di tre vettori genera lo spazio vettoriale 3-dimensionale $\mathbb{R}^3$, dunque è una base di $\mathbb{R}^3$.

5– **Dimensione e sottospazi**. Il comportamento della dimensione di spazi vettoriali rispetto alla relazione di inclusione è dato dalla

Proposizione[cfr. Prop.4.2.4 p.80] Sia W un sottospazio di uno spazio vettoriale finitamente generato V, allora W è finitamente generato e

(1) $\dim(W) \leq \dim(V)$;

(2) $\dim(W) = \dim(V)$ implica $W = V$.

Dimostrazione Proviamo che vale la (1). Ciascuna base B di W in particolare è un sottinsieme linearmente indipendente di V e dunque è contenuta in una base C di V; dunque il numero dei vettori in B è minore o uguale al numero dei vettori in C. Proviamo che vale la (2). Consideriamo una base B di W; B è un sottinsieme linearmente indipendente di V; se B non generasse V allora B sarebbe contenuta propriamente in una base C di V e si avrebbe $\dim(W) < \dim(V)$, contro l'ipotesi; dunque B genera V. Segue che $W = V$.