Lezione del 26.03

In questa lezione si è introdotto lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali in una variabile x, ed i suoi sottospazi notevoli $\mathbb{R}_n[x]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ costituiti dal polinomi nullo e dai polinomi di grado minore o uguale ad n, con relative basi canoniche; si è inoltre osservato che $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato.

Si sono svolti i seguenti esercizi: 4.5.8, 4.5.16, 4.5.17, 4.5.2, 4.5.15 del paragrafo "Esercizi proposti" pp.92-94.

Spazio vettoriale dei polinomi. Formalmente, un *polinomio* a coefficienti reali nella variabile x è una scrittura della forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

dove $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri reali, detti *coefficienti* del polinomio, e n è un numero naturale; $a_0, a_1x, \ldots, a_nx^n$ sono detti *termini* del polinomio, e due scritture si ritengono uguali se differiscono per termini con coefficienti nulli. Due polinomi qualsiasi possono dunque essere dati da due scritture della forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

(eventualmente aggiungendo termini nulli); la somma dei due polinomi per definizione è data dalla scrittura

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n;$$

e il prodotto di uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ per un polinomio è dato da

$$\alpha p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \cdots + (\alpha a_n)x^n$$

L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x si indica con $\mathbb{R}[x]$; questo insieme con le operazioni sopra definite risulta essere uno spazio vettoriale; il vettore nullo è dato dalla scrittura 0 o equivalentemente dalla $0 + 0x$ o ...

Dato un polinomio $p(x)$, a ciascun numero reale r resta associato il un numero reale $p(r)$ ottenuto valutando l'espressione $p(x)$ in $x = r$, e si ha una funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto p(r)$. Si dice che p è la *funzione poliniomiale* associata al polinomio $p(x)$. Chiaramente, a due polinomi uguali corrispondono funzioni polinomiali uguali. Viceversa, si prova che se a due polinomi corrisponde la stessa funzione polinomiale allora i due polinomi devono essere uguali; questo enunciato viene detto il *principio di identità* dei polinomi. Dunque, si possono riguardare i polinomi a coefficienti reali in una variabile equivalentemente come scritture algebriche formali e come funzioni reali di una variabile reale. Inoltre, questa identificazione è compatibile con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite sulle scritture formali e sulle funzioni.

Un polinomio del tipo $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$ di dice polinomio di *grado n*; per il polinomio nullo non si definisce il grado. Si verifica che:

- il grado di $p(x)+q(x)$, qualora sia definito, è minore od uguale al massimo fra il grado di $p(x)$ e il grado di $q(x)$;

- il grado di $\alpha p(x)$ è uguale al grado di $p(x)$ se $\alpha \neq 0$ e $p(x) \neq 0$.

Da queste proprietà segue che per ciascun numero naturale n fissato, l'insieme $\mathbb{R}_n[x]$ costituito dal polinomio nullo e dai polinomi di grado minore od uguale ad n costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. In particolare si hanno:

- il sottospazio dei polinomi costanti $\mathbb{R}_0[x] = \{a|\ a \in \mathbb{R}\}$ che coincide col sottospazio $\langle 1 \rangle$ generato dal polinomio 1;

- il sottospazio $\mathbb{R}_1[x] = \{a + bx|\ a, b \in \mathbb{R}\}$ che coincide col sottospazio $\langle 1, x \rangle$ generato dai polinomi $1, x$;

- il sottospazio $\mathbb{R}_2[x] = \{a + bx + cx^2|\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ che coincide col sottospazio $\langle 1, x, x^2 \rangle$ generato dai polinomi $1, x, x^2$.

$\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato. Ciò deriva dal fatto che per ciascuna sequenza finita di polinomi non nulli $p_1(x), \dots, p_r(x)$ indicati con $n_1, \dots, n_r$ i rispettivi gradi, e indicato con n il loro massimo, si ha che $p_1(x), \dots, p_r(x) \in \mathbb{R}_n[x]$; dunque $\langle p_1(x), \dots, p_r(x) \rangle \subseteq \mathbb{R}_n[x]$ che a sua volta è contenuto propriamente in $\mathbb{R}[x]$.

Per ciascun intero n fissato, i polinomi $1, x, x^2, \dots, x^n$ sono linearmente indipendenti; infatti, l'uguaglianza $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$, per la definizione di uguaglianza fra polinomi, vale solo se $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Dunque l'insieme $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ è una base del sottospazio $\mathbb{R}_n[x]$, e questo sottospazio ha dimensione $n + 1$.