Lezione del 09.04 - II

–**Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo a scala**. Data una matrice a scala S di tipo $m \times n$, sia $p = rr(S)$ il numero delle righe non nulle di S. Consideriamo il sistema lineare omogeneo $S\underline{x} = \underline{0}$ di m equazioni in n incognite $x_1, \ldots, x_n$. Il sistema ha almeno la soluzione banale $x_1 = \cdots = x_n = 0$; abbiamo visto che se $p = n$ allora il sistema ha solo la soluzione banale, mentre se $p < n$ allora il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da $n - p$ variabili libere; specificamente: se $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$ sono gli indici di colonna dei pivot di S, allora il sistema si può risolvere rispetto alle incognite $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}$ lasciano le altre $n - p$ incognite come variabili libere. Abbiamo poi visto che l'insieme W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $S\underline{x} = \underline{0}$ nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Si ha l'impressione che il numero $n - p$ delle variabili libere sia la dimensione del sottospazio. Così è. Di seguito illustriamo questo fatto nel caso di tre incognite. Poi formuliamo senza dimostrazione il risultato generale.

Data una matrice a scala S di tipo $m \times 3$, consideriamo il sistema lineare $S\underline{x} = \underline{0}$ di m equazioni in 3 incognite x, y, z, e lo spazio N delle soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^3$. Indichiamo con p il numero delle righe non nulle di S; osserviamo che $0 \leq p \leq 3$. In realtà il sistema consiste di p equazioni. Di seguito consideriamo il sistema e lo spazio N delle sue soluzioni per i vari valori di p.

(0) Per $p = 0$ tutte le equazioni del sistema sono uguali all'equazione $0x + 0y + 0z = 0$; questa equazione ha per soluzione ogni terna di numeri reali. Dunque $N = \mathbb{R}^3$ e $\dim(N) = 3$.

(1) Per $p = 1$ il sistema è equivalente ad un'unica equazione. Distinguiamo tre tipi di equazione.

Se il coefficiente di x è diverso da zero, allora l'equazione è equivalente ad una equazione del tipo $x + by + cz = 0$; questa equazione ha soluzione generale $x = -by - cz$ con y, z variabili libere; in altri termini, lo spazio N delle soluzioni è costituito dalle terne $(-by - cz, y, z) = y(-b, 1, 0) + z(-c, 0, 1)$ con $y, z \in \mathbb{R}$; dunque $N = \langle(-b, 1, 0), (-c, 0, 1)\rangle$ e $\dim(N) = 2$.

Se il coefficiente di x è zero ma il coefficiente di y è diverso da zero, allora l'equazione è equivalente ad una equazione del tipo $y + cz = 0$; questa equazione ha soluzione generale $y = -cz$ con x, z variabili libere; in altri termini, lo spazio N delle soluzioni è costituito dalle terne $(x, -cz, z) = x(1, 0, 0) + z(0, -c, 1)$ con $x, z \in \mathbb{R}$; dunque $N = \langle(1, 0, 0), (0, -c, 1)\rangle$ e $\dim(N) = 2$.

Se i coefficienti di x e y sono zero ma il coefficiente di z è diverso da zero, allora l'equazione è equivalente all'equazione $z = 0$; questa equazione ha soluzione generale $z = 0$ con x, y variabili libere; in altri termini, lo spazio N delle soluzioni è costituito dalle terne $(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$ con $x, y \in \mathbb{R}$; dunque $N = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$ e $\dim(N) = 2$.

(2) Per $p = 2$ il sistema è equivalente ad un sistema di due equazioni. Si hanno tre tre tipi di sistema. Ne consideriamo uno solo.

Se il coefficiente di x nella prima equazione e il coefficiente di y nella seconda equazione sono diversi da zero, allora il sistema è equivalente ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} x + by + cz = 0 \\ \qquad y + dz = 0 \end{cases};$$

questo sistema ha soluzione generale $x = (bd - c)z$, $y = -dz$ con z variabile libera; in altri termini, lo spazio N delle soluzioni è costituito dalle terne $((bd - c)z, -dz, z) = z((bd - c), -d, 1)$ con $z \in \mathbb{R}$; dunque $N = \langle((bd - c), -d, 1)\rangle$ e $\dim(N) = 1$.

(3) Per $p = 3$ il sistema è equivalente ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} x + by + cz = 0 \\ \qquad y + dz = 0 \\ \qquad\qquad z = 0 \end{cases},$$

che ha solo la soluzione $x = y = z = 0$; in altri termini, lo spazio N delle soluzioni è $N = \{(0, 0, 0)\}$ e $\dim(N) = 0$.

Proposizione. Sia $S\underline{x} = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite, con S matrice a scala $m \times n$, e sia $N(S)$ lo spazio delle soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\dim(N(S)) = n - rr(S).$$

Se $h_1 < h_2 < \ldots < h_q$ sono gli indici delle colonne di S nelle quali non compaiono i pivot ($q = n - rr(S)$), allora per ogni $q-$pla $r_1, r_2, \ldots, r_q$ di numeri reali, esiste una ed una sola soluzione del sistema che ha coordinate h_1-ma, h_2-ma, ... h_q-ma rispettivamente $r_1, r_2, \ldots, r_q$; le soluzioni del sistema $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_q$ caratterizzate dalle seguenti condizioni sono una base di $N(S)$

$$\begin{array}{ll} \underline{w}_1 & \text{ha coordinate } h_1\text{-ma, } h_2\text{-ma, ... } h_q\text{-ma rispettivamente} \;\; 1, 0, \ldots, 0 \\ \underline{w}_2 & \text{ha coordinate } h_1\text{-ma, } h_2\text{-ma, ... } h_q\text{-ma rispettivamente} \;\; 0, 1, \ldots, 0 \\ \vdots & \\ \underline{w}_q & \text{ha coordinate } h_1\text{-ma, } h_2\text{-ma, ... } h_q\text{-ma rispettivamente} \;\; 0, 0, \ldots, 1 \end{array}$$

–**Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo**. Di seguito estendiamo la formula per la dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo dal caso di un sistema a scala al caso generale. Innanzitutto diamo la definizione di rango per righe per una matrice qualsiasi.

Definizione. Si dice *rango per righe* di una matrice A $m \times n$, e si indica con $rr(A)$, la dimensione del sottospazio generato dalle m righe di A in $\mathbb{R}^n$.

Nel caso in cui A sia una matrice a scala, una base dello spazio generato dalle righe di A è data dalle righe non nulle di A e il rango per righe di A è il numero di righe non nulle di A. Dunque la defnzione generale è coerente con la defnzione particolare data per le sole matrici a scala.

-Osservazione. Le operazioni elementari sulle righe di una matrice A $m \times n$ lasciano invariato il sottospazio generato dalle m righe di A in $\mathbb{R}^n$, in particolare lasciano invariata la dimensione di questo spazio, che è il rango per righe di A.

Proposizione. Sia $A\underline{x} = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite e sia $N(A)$ lo spazio delle soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\dim(N(A)) = n - rr(A).$$

Infatti, al dato sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ corrisponde la matrice $(A|\underline{0})$, applicando a questa matrice il procedimento di Gauss si ottiene una matrice a scala $(S|\underline{0})$, alla quale corrisponde il sistema a scala $S\underline{x} = \underline{0}$. Poichè lo spazio delle soluzioni dei due sistemi è lo stesso e $rr(A) = rr(S)$, si ha

$$\dim(N(A)) = \dim(N(S)) = n - rr(S) = n - rr(A).$$