Lezione del 12.04

Questa lezione si riferisce al Cap.5 "Applicazioni lineari", Par.5.1 "Definizione di applicazione lineare" (si è trattato il Th.5.17), Par.5.4 "Nucleo e immagine".

Varianti definizione di linearità. Abbiamo definito un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali V, W come un'applicazione $L : V \to W$ tale che

$$L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v}), \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V \tag{1}$$

$$L(\alpha\underline{v}) = \alpha L(\underline{v}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \underline{v} \in V \tag{2}$$

Queste due condizioni sono equivalenti all'unica condizione

$$L(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}) = \alpha L(\underline{u}) + \beta L(\underline{v}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \underline{u}, \underline{v} \in V, \tag{3}$$

che a sua volta è equivalente alla seguente

$$L(\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n) = \alpha_1 L(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_n L(\underline{v}_n), \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R},\ \underline{v}_i \in V.$$

In modo leggermente informale:

> un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali è un'applicazione che trasforma combinazioni lineari di vettori del dominio in combinazioni lineari di vettori del codominio, con gli stessi coefficienti.

Si è mostrato come si possano costruire applicazioni lineari su uno spazio vettoriale di dimensione 1 o 2 con una base fissata. Di seguito si riporta la costruzione nel caso di dimensione 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 e sia W un qualsiasi spazio vettoriale. Fissata una base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di V, si ha che ogni vettore in V si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2$. di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$. Fissati 2 vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ in W, definiamo un'applicazione $L : V \to W$ ponendo

$$L(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2) = \alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2.$$

Questa applicazione è lineare; infatti:

(1) per ogni due vettori $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2$ e $\beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2$ in V, si ha

$$\begin{aligned} L(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2) &= L((\alpha_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\underline{v}_2) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\underline{w}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\underline{w}_2, \\ &= \alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2 + \beta_1\underline{w}_1 + \beta_2\underline{w}_2 \\ &= L(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2) + L(\beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2) \end{aligned}$$

(2) per ogni $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2$ in V ed ogni γ in $\mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} L(\gamma(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2)) &= L((\gamma\alpha_1)\underline{v}_1 + (\gamma\alpha_2)\underline{v}_2) \\ &= (\gamma\alpha_1)\underline{w}_1 + (\gamma\alpha_2)\underline{w}_2 \\ &= \gamma(\alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2) \\ &= \gamma L(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2) \end{aligned}$$

Osserviamo che L è l'unica applicazione lineare $V \to W$ tale che

$$L(\underline{v}_1) = \underline{w}_1,\ L(\underline{v}_2) = \underline{w}_2.$$

In generale, in modo simile si prova

Teorema.[Th. 5.1.7] Siano V e W due spazi vettoriali e sia $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ una base di V. Per ogni $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ in W esiste una ed una sola applicazione lineare $L : V \to W$ tale che

$$L(\underline{v}_1) = \underline{w}_1, \ \ldots, \ L(\underline{v}_n) = \underline{w}_n.$$

Specificamente: per ogni vettore $\underline{x} \in V$, se $\underline{x} = \alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n$ è la scrittura del vettore come combinazione lineare dei vettori della base $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, allora

$$L(\underline{x}) = \alpha_1\underline{w}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{w}_n.$$

Esempio. Costruzione di un'applicazione lineare "generica" $\mathbb{R}_1[x] \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Consideriamo una base di $\mathbb{R}_2[x]$, ad esempio la base canonica $1, x$ e scegliamo in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ due matrici $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare $L : \mathbb{R}_1[x] \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$L(1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \ L(x) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il valore di L su un qualsiasi polinomio $a + bx \in \mathbb{R}_1[x]$ è dato da

$$L(a+bx) = L(a\ 1 + b\ x) = a\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-4b & -3a+3b \\ -4a+2b & 5a-5b \end{pmatrix}.$$

Rappresentazione geometrica delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}^2$. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in un punto O, e siano $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ i vettori applicati in O con termini nei punti unità del primo e del secondo asse. Comunque siano dati due vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ applicati in O, esiste una ed una sola applicazione lineare $L : V \to W$ tale che $L(\underline{e}_1) = \underline{w}_1$ e $L(\underline{e}_2) = \underline{w}_2$. Consideriamo il caso generale in cui $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono linearmente indipendenti. Per semplicità, possiamo identificare ciascun vettore applicato in O con il suo punto termine, e quindi identificare L con una funzione che manda punti del piano in punti del piano. Allora si può apprezzare il fatto che L associa a ciascun rettangolo con vertici $\underline{0}, \alpha\underline{e}_1, \beta\underline{e}_2, \alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2$ in un parallelogramma con vertici $\underline{0}, \alpha\underline{w}_1, \beta\underline{w}_2, \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2$

Sottospazi associati ad un'applicazione lineare. Ad un'applicazione lineare $L : V \to W$ fra due spazi vettoriali sono associati in modo naturale un sottospazio del codominio W ed un sottospazio del dominio V.

Le immagini dei vettori di V in W formano un sottinsieme di W che si dice *immagine* di L e si indica con $\mathrm{Im}(L)$, in simboli:

$$\mathrm{Im}(L) = \{L(\underline{x}) | \ \underline{x} \in V\}.$$

Questo insieme è un sottospazio di W. Infatti: per ogni due vettori $L(\underline{u})$ ed $L(\underline{v})$ in $\mathrm{Im}(L)$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ anche $L(\underline{u}) + L(\underline{v}) = L(\underline{u}+\underline{v})$ e $\alpha L(\underline{u}) = L(\alpha\underline{u})$ stanno in $\mathrm{Im}(L)$.

Le preimmagini in V del vettore nummo di W formano un sottinsieme di V che si dice *nucleo* di L e si indica con $\mathrm{Ker}(L)$, in simboli:

$$\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{x} \in V | \ L(\underline{x}) = \underline{0}\}.$$

Questo insieme è un sottospazio di V. Infatti: per ogni due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ in V tali che $L(\underline{u}) = L(\underline{v}) = \underline{0}$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha anche $L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ e $L(\alpha\underline{u}) = \alpha L(\underline{u}) = \alpha\underline{0} = \underline{0}$.

Esempio. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che manda i vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ della base canonica in due dati vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ linearmente indipendenti. Allora si ha:

$\mathrm{Im}(L) = \{\alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2 |\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle = \mathbb{R}^2$.

$\mathrm{Ler}(L) = \{\alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2 |\ \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2 = \underline{0}\} = \{\underline{0}\}$

Esempio. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che manda i vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ della base canonica in due dati vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ non nulli legati dalla relazione $\underline{w}_2 = 2\underline{w}_1$. Allora si ha:

$\mathrm{Im}(L) = \{\alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2 |\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle = \langle \underline{w}_1$, un sottospazio 1-dimensionale.

$\mathrm{Ker}(L) = \{\alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2 |\ \alpha\underline{w}_1 + \beta 2\underline{w}_1 = \underline{0}\}$; la condizione $\alpha\underline{w}_1 + \beta 2\underline{w}_1 = (\alpha + 2\beta)\underline{w}_1 = \underline{0}$ implica $\alpha + 2\beta = 0$ da cui $\alpha = -2\beta$ con β variabile libera; dunque $\mathrm{Ker}(L) = \{-2\beta\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2 |\ \beta \in \mathbb{R}\} = \langle -2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 \rangle$, un sottospazio 1-dimensionale.

Applicazioni lineari suriettive, iniettive. Si è ricordato il concetto di funzione suriettiva. Si è osservato che un'aplicazione qualsiasi, in particolare un'applicazione lineare $L : V \to W$ è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im}(L) = W$.

Si è ricordato il concetto di funzione iniettiva, nelle sue varie formulazioni. Si è osservato che se un'aplicazione qualsiasi, in particolare un'applicazione lineare $L : V \to W$ è iniettiva, allora $\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{0}\}$. Si è provato che viceversa se un'applicazione lineare $L : V \to W$ ha nucleo $\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{0}\}$, allora è iniettiva. Infatti, per ogni due vettori $\underline{u}, \underline{v} \in V$, la condizione $L(\underline{u}) = L(\underline{v})$ equivale alla condizione $L(\underline{u}) - L(\underline{v}) = \underline{0}$ che per la linearità di L si può scrivere $L(\underline{u} - \underline{v}) = \underline{0}$ da cui per l'ipotesi si ottiene $\underline{u} - \underline{v} = \underline{0}$ cioè $\underline{u} = \underline{v}$.

Questi enunciati sono riassunti dalla Prop.5.4.8.