Lezione del 16.04

Questa lezione si riferisce al Cap.5 "Applicazioni lineari", Par.5.5 "Il teorema della dimensione" e Par.5.6 "Isomorfismo di spazi vettoriali".

–**Relazione fra dimensioni di dominio, nucleo e immagine.** A ciascuna applicazione lineare $L : V \to W$ sono associati i due spazi vettoriali dominio V e codominio W, e i due rispettivi sottospazi nucleo $\mathrm{Ker}(L) \subseteq V$ e immagine $\mathrm{Im}(L) \subseteq W$. Ci si chiede se sussiste una qualche relazione fra le dimensioni di questi spazi e sottospazi, oltre alle disuguaglianze che derivano dalle inclusioni. In realtà, per ciascuna inclusione dello spazio vettoriale W come sottospazio di uno spazio vettoriale W', a ciascuna applicazione lineare $L : V \to W$ si può associare un'applicazione lineare $L' : V \to W'$ in modo che $\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{Ker}(L')$ e $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Im}(L')$. Dunque se esiste una relazione, esiste fra le dimensioni di V, di $\mathrm{Ker}(L)$ e $\mathrm{Im}(L)$. Di seguito studiamo il problema per il caso particolare delle applicazioni lineari $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e mettiamo in evidenza una legge, poi enunciamo un teorema generale. Il modo nel quale trattiamo il problema nel caso particolare è indicativo della dimostrazione del teorema generale.

Consideriamo dunque un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Consideriamo i possibili casi a seconda della dimensione di $\mathrm{Ker}(L) \subseteq \mathbb{R}^2$, che può valere 0,1,2.

- Se $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2$, allora $\mathrm{Ker}(L) = \mathbb{R}^2$, allora $\mathrm{Im}(L) = \{\underline{0}\}$, allora $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 0$.

- Sia $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$. Allora $\mathrm{Ker}(L) = \langle \underline{v}_1 \rangle$. Il vettore $\underline{v}_1$ fa parte di una base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di $\mathbb{R}^2$. Ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si scrive in uno ed un solo modo come $\alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2$ e la sua immagine è $\alpha L(\underline{v}_1) + \beta L(\underline{v}_2) = \beta L(\underline{v}_2)$; si ha $\mathrm{Im}(L) = \langle L(\underline{v}_2) \rangle$. Deve essere $L(\underline{v}_2) \neq \underline{0}$, dunque $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 1$.

- Sia $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 0$. Allora $\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{0}\}$. Sia $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ una base di $\mathbb{R}^2$. Ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si scrive in uno ed un solo modo come $\alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2$ e la sua immagine è $\alpha L(\underline{e}_1) + \beta L(\underline{e}_2)$; si ha $\mathrm{Im}(L) = \langle L(\underline{e}_1), L(\underline{e}_2) \rangle$. Consideriamo le relazioni fra i vettori $L(\underline{e}_1), L(\underline{e}_2)$. Un'uguaglianza $\alpha L(\underline{e}_1) + \beta L(\underline{e}_2) = \underline{0}$ vale se e solo se $\alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2 \in \mathrm{Ker}(L)$. Nel caso in esame si ha $\alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2 = \underline{0}$ che implica $\alpha = \beta = 0$. Dunque i vettori $L(\underline{e}_1), L(\underline{e}_2)$ sono linearmente indipendenti, e $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2$.

Teorema della dimensione[cfr. Th.5.5.1] Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali finitamente generati. Allora

$$\dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(V).$$

Esercizio Determinare se possibile un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathrm{Im}(F) = \langle \underline{e}_1 + \underline{e}_2,\ 3\underline{e}_1 - \underline{e}_3, 3\underline{e}_2 + \underline{e}_3 \rangle, \quad \mathrm{Ker}(F) = \langle -\underline{e}_1 + \underline{e}_3 - 3\underline{e}_4 \rangle$$

Svolgimento. Prima di tutto, controlliamo se le condizioni su F sono compatibili con il teorema della dimensione.

$\mathrm{Ker}(F)$ è generato da $-\underline{e}_1 + \underline{e}_3 - 3\underline{e}_4$ e dunque ha dimensione 1.

$\mathrm{Im}(F)$ è generato da $\underline{e}_1+\underline{e}_2$, $3\underline{e}_1-\underline{e}_3$, $3\underline{e}_2+\underline{e}_3$; questi vettori sono a due a due linearmente indipendenti, mentre nel complesso sono linearmente dipendenti in quanto

$$(3\underline{e}_1 - \underline{e}_3) + (3\underline{e}_2 + \underline{e}_3) = 3(\underline{e}_1 + \underline{e}_2);$$

dunque $\mathrm{Im}(F)$ ha dimensione 2.

Si ha

$$\dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F)) = 1 + 2 = 3 < 4 = \dim(\mathbb{R}^4),$$

in contraddizione col teorema della dimensione. Dunque non esiste alcuna applicazione lineare che soddisfi le condizini richieste.

Esercizio. [Variazione] Determinare se possibile un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathrm{Im}(L) = \langle (1,1,0),\ (3,0,-1),\ (0,3,-1)\rangle, \quad \mathrm{Ker}(L) = \langle (-1,0,1,-3)\rangle$$

Svolgimento. Le dimensioni di $\mathrm{Ker}(F)$, $mathrmIm(F)$, e $\mathbb{R}^4$ sono rispettgivamente 1, 3, 4 (si lasciano i dettagli al lettore), in accordo col teorema della dimensione. Dunque non è esclusa l'esistenza di un'applicazione lineare che soddisfi le condizioni richieste.

Per cercare di costruire F : costruiamo una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo al vettore $(-1,0,1,-3)$ generatore di $\mathrm{Ker}(F)$ altri tre vettori in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4$, ad esempio i vettori della base canonica $(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$; poniamo

$$\begin{aligned} F(-1,0,1,-3) &= (0,0,0), \\ F(0,1,0,0) &= (1,1,0), \\ F(0,1,0,0) &= (3,0,-1), \\ F(0,0,0,1) &= (0,3,-1); \end{aligned}$$

queste condizioni individuano una ed una sola applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Si verifica che questa applicazione lineare soddisfa le condizioni imposte.

–**Applicazioni lineari iniettive, suriettive e dimensione.** Per gli insiemi finiti, le nozioni di funzione iniettiva, suriettiva, biettiva e di numero degli elementi sono legate dalle seguenti relazioni: (1) esiste una funzione iniettiva $A \to B$ se e solo se $|A| \leq |B|$; (2) esiste una funzione suriettiva $A \to B$ se e solo se $|A| \geq |B|$; (3) esiste una funzione biiettiva $A \to B$ se e solo se $|A| = |B|$. Per gli spazi vettoriali finitamente generati, le nozioni di applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva e di dimensione sono legate da analoghe relazioni. Mostriamo prima alcuni esempi di applicazioni lineari iniettive o suriettive da uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ad uno $\mathbb{R}^m$.

Esempi.

L'applicazione lineare $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ che manda ciascun x in $(x,0)$ è iniettiva; più in generale, per ogni due numeri interi positivi fissati n ed m con $n \leq m$, è iniettiva l'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, che manda $(x_1,\ldots,x_n)$ in $(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$.

L'applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che manda ciascun (x_1,x_2) in x_1 è suriettiva; più in generale, per ogni due numeri interi positivi fissati n ed m con $n \geq m$, è suriettiva l'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, che manda $(x_1,\ldots,x_m,\ldots,x_n)$ in $(x_1,\ldots,x_m)$.

Proposizione [cfr. Prop.5.5.2] Siano V e W spazi vettoriali finitamente generati. Allora: (1) esiste un'applicazione lineare iniettiva $V \to W$ solo se $\dim(V) \leq \dim(W)$; (2) esiste un'applicazione lineare suriettiva $V \to W$ solo se $\dim(V) \geq \dim(W)$; (3) esiste un'applicazione lineare biiettiva $V \to W$ solo se $\dim(V) = \dim(W)$.

Dimostrazione Per ciascuna applicazione lineare $L : V \to W$ si ha

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L))$$

(1) Se L è iniettiva, allora $\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{0}\}$ da cui $\dim(V) = 0 + \dim(\mathrm{Im}(L)) \leq \dim(W)$.

(2) Se L è suriettiva, allora $\mathrm{Im}(L) = W$ da cui $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(W) \geq \dim(W)$.

La (3) è conseguenza delle (1) e (2).

– **Isomorfismi.** Si può avere avuto l'impressione che tutti gli spazi vettoriali finitamente generati che abbiamo considerato "assomigliano" a spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$. Questa impressione è corretta e può essere precisata con l'uso di applicazioni lineari biiettive, dette "isomorfismi".

Esempio Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ ha per elementi i polinomi di grado al più 2; associando a ciascun tale polinomio la terna dei suoi coefficienti

$$(a + bx + cx^2) \mapsto (a, b, c)$$

si ha un'applicazione lineare biiettiva verso lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Più in generale, si ha l'applicazione lineare biiettiva

$$\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Esempio Lo spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ha per elementi le matrici 2×2 su $\mathbb{R}$; associando a ciascuna matrice la quaterna dei suoi elementi, letti sempre allo stesso modo, ad esempio

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$$

si ha un'applicazione lineare biiettiva verso lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$; Più in generale, si ha l'applicazione lineare biiettiva

$$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}).$$

Un'applicazione lineare biiettiva permette di tradurre fedelmente ogni discorso sullo spazio vettoriale dominio in un discorso sullo spazio vettoriale codominio, come precisato dalla seguente

Proposizione Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare biiettiva. Allora

$$\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} = \underline{z} \text{ in } V \quad \text{se e solo se} \quad \alpha L(\underline{u}) + \beta L(\underline{v}) = L(\underline{z}) \text{ in } W$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\underline{u}, \underline{v}, \underline{z}$ in V.

Infatti. Da una parte, da $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} = \underline{z}$ segue per la linearità di L che $\alpha L(\underline{u}) + \beta L(\underline{v}) = L(\underline{z})$. Dall'altra, da $\alpha L(\underline{u}) + \beta L(\underline{v}) = L(\underline{z})$; segue per la linearità di L che $L(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}) = L(\underline{z})$ e per la biiettività di L che $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} = \underline{z}$.

Definizione.[Def.5.6.1] Un'applicazione lineare biiettiva si dice *isomorfismo*. Due spazi vettoriali V e W si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo $V \to W$; in tal caso si scrive $V \simeq W$.

Possiamo allora dire che: per ogni numero naturale positivo n fissato, $\mathbb{R}_n[x]$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$; per ogni due numeri naturali positivi m, n fissati, $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{mn}$. In simboli:

$$\mathbb{R}_n[x] \simeq \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}.$$

Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi ad uno spazio $\mathbb{R}^n$, precisamente

Teorema.[cfr. Th.5.6.3] Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato,e sia $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ una base ordinata di V. Allora esiste uno ed un solo isomorfismo $L : V \to \mathbb{R}^n$ tale che $L(\underline{v}_1) = \underline{e}_1, \ldots, L(\underline{v}_n) = \underline{e}_n$; specificamente, L manda ciascun vettore di V nella $n-$pla ordinata delle sue coordinate rispetto alla base ordinata

$$L(\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$