Lezione del 19.04

In questa lezione sono stati trattati essenzialmente i seguenti argomenti: (1) per l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associata ad una matrice A $m \times n$, descrizione dell'immagine di L come spazio generato dalle colonne di A e del nucleo di L come spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$; (2) per una matrice, uguaglianza del rango per righe col rango per colonne e definizione del rango; (3) per un'applicazione lineare $L : V \to W$, insieme preimmagine $L^{-1}(\underline{b})$ ($\underline{b} \in W$) e sua struttura in relazione allo spazio $L^{-1}(\underline{0}) = \mathrm{Ker}(L)$; (4) per l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associata ad una matrice A $m \times n$, insieme preimmagine $L^{-1}(\underline{b})$ ($\underline{b} \in \mathbb{R}^n$) come insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ e sua struttura. I riferimenti principali della lezione sono: Cap.5 "Applicazioni lineari" Par.5.7 Calcolo del nucleo e dell'immagine; Cap.6 "Sistemi lineari", Par.6.1 "Controimmagine" e Par.6.2 "Sistemi lineari ...".

– Consideriamo un'applicazione lineare definita su dominio spazio vettoriale di dimensione nota; il teorema della dimensione afferma che la somma delle dimensioni del nucleo e dell'immagine è uguale alla dimensione del dominio; dunque conoscere la dimensione del nucleo equivale a conoscere la dimensione dell'immagine. Di seguito, consideriamo un'applicazione lineare e determiniamo la dimensione della sua immagine e la dimensione della suo nucleo in due modi: (1) determinando direttamente la dimensione dell'immagine e ricavando quella del nucleo; (2) determinando direttamente la dimensione del nucleo e ricavando quella dell'immagine.

- Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} L(\underline{e}_1) &= \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3 \\ L(\underline{e}_2) &= -2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - 2\underline{e}_3 \\ L(\underline{e}_3) &= \underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 + \underline{e}_3. \end{aligned}$$

(1) L è l'applicazione lineare tale che

$$L(\underline{e}_1) = (1, 2, 1),\ L(\underline{e}_2) = (-2, 3, -2),\ L(\underline{e}_3) = (1, 4, 1),$$

che agisce su ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ come

$$L(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3) = x_1(1, 2, 1) + x_2(-2, 3, -2) + x_3(1, 4, 1),$$

e dunque

$$\mathrm{Im}(L) = \langle (1, 2, 1), (-2, 3, -2), (1, 4, 1) \rangle.$$

$\mathrm{Im}(L)$ è lo spazio generato dalle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

applicando il procedimento di Gauss, otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui righe generano ancora lo spazio $\mathrm{Im}(L)$. Questa matrice ha rango per righe 2. Dunque si ha

$$\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2;$$

si ricava

$$\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 3 - 2 = 1.$$

(2) L è l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

che agisce su ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ come

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Ker}(L)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando alla matrice dei coefficienti del sistema il procedimento di Gauss si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui sistema lineare omogeneo associato ha ancora spazio delle soluzionim $\mathrm{Ker}(L)$. Questa matrice ha rango per righe 2. Dunque si ha

$$\dim(Ker(L)) = 3 - 2 = 1,$$

si ricava

$$\dim(Im(L)) = 3 - 1 = 2.$$

–**Rango di una matrice.** Sia data una matrice A di tipo $m \times n$. Le m righe di A sono vettori in $\mathbb{R}^n$, generano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, che ha una dimensione che abbiamo definito "rango per righe" di A ed indicato con $rr(A)$. Le n colonne di A sono vettori in $\mathbb{R}^m$, generano un sottospazio di $\mathbb{R}^m$, che ha una dimensione che ora definiamo "rango per colonne" di A ed indichiamo con $rc(A)$. Si ha

Teorema. Per ogni matrice A su $\mathbb{R}$, il rango per righe coincide col rango per colonne: $rr(A) = rc(A)$. Il valore comune dei due ranghi si dice *rango* di A e si indica con $rg(A)$.

Dimostrazione. Sia A di tipo $m \times n$, e sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(\underline{x}) = A\underline{x}$, l'applicazione lineare associata ad A. Calcoliamo le dimensioni di $\mathrm{Im}(L)$ e di $\mathrm{Ker}(L)$ in due modi.

(1) L è l'unica applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $L(\underline{e}_1) = \underline{a}_1, \ldots, L(\underline{e}_n) = \underline{a}_n$, dove $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ sono i vettori di $\mathbb{R}^m$ che compaiono nelle colonne di A; si ha $\mathrm{Im}(L) = \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$, dunque

$$\dim(\mathrm{Im}(L)) = rc(A), \quad \text{da cui} \quad \dim(\mathrm{Ker}(L)) = n - rc(A).$$

(2) $\mathrm{Ker}(L)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ dunque

$$\dim(\mathrm{Ker}(L)) = n - rr(A), \qquad \text{da cui} \qquad \dim(\mathrm{Im}(L)) = n - (n - rr(A)) = rr(A).$$

Confrontando questi risultati, si ha $rc(A) = rr(A)$.

– **Matrice trasposta.** Sia data una matrice A. Leggendo gli elementi di A per righe e trascrivendoli per colonne, equivalentemente, leggendo gli elementi di A per colonne e trascrivendoli per righe, si ottiene una nuova matrice. Questa matrice si dice *matrice trasposta* di A, e si indica con A^T. Ad esempio,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = A^T.$$

In generale, una matrice A di tipo $m \times n$ ha trasposta A^T di tipo $n \times m$ e l'elemento di posto (k, h) in A^T è l'elemento di posto (h, k) in A :

$$(A^T)_{kh} = A_{hk}, \quad (h = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, m)$$

Chiaramente, si ha

$$rc(A) = rr(A^T),\ rr(A) = rc(A^T).$$

Dunque il Teorema di sopra si può esprimere come $rr(A^T) = rr(A)$ e si ha

$$rg(A^T) = rg(A).$$

–**Preimmagine.** Sia data una funzione $f : A \to B$ fra due insiemi A e B. Ricordiamo che se per certo un elemento $a \in A$ ed un certo elemento $b \in B$ si ha $f(a) = b$, allora oltre a dire che b è *la immagine* di a si dice anche che a è *una preimmagine* di b. L'insieme delle preimmagini di un dato elemento $b \in B$ si indica con $f^{-1}(b)$

$$f^{-1}(b) = \{a \in A |\ f(a) = b\}.$$

Chiaramente $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ se e solo se $b \in \mathrm{Im}(f)$.

(La famiglia di insiemi $f^{-1}(b)$ $(b \in \mathrm{Im}(f))$ è una *partizione* di A, nel senso che possiede le seguenti proprietà:

$f^{-1}(b) \neq \emptyset$ per ogni b in $\mathrm{Im}(f)$;

$f^{-1}(b) \cap f^{-1}(c) = \emptyset$ per ogni $b \neq c$ in $\mathrm{Im}(f)$;

$\cup_{b \in \mathrm{Im}(f)} f^{-1}(b) = A$.)

Nel seguito consideriamo solo applicazioni lineari. Osserviamo che per una applicazione lineare $L : V \to W$ la controimmmagine del vettore nullo di W è per definizione il nucleo di L :

$$L^{-1}(\underline{0}) = \mathrm{Ker}(L).$$

Esempio. È data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x, y) = x + y$. Per ogni b fissato in $\mathbb{R}$, si ha

$$L^{-1}(b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y = b\}.$$

In particolare:

$$\begin{aligned} L^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(L) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x+y=0\} \\ &= \{(-y,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1,1) \in \mathbb{R}^2 |\ y \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1)\rangle; \end{aligned}$$

sotto le dovute identificazioni fra vettori di $\mathbb{R}^2$ e vettori del piano e fra vettori del piano e punti del piano, questo è l'insieme dei punti della retta generata dal vettore $(-1,1)$.

$$\begin{aligned} L^{-1}(1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x+y=1\} \\ &= \{(1-y,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1,0)+y(-1,1) \in \mathbb{R}^2 |\ y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

sotto le dovute identificazioni, questo è l'insieme dei punti della retta passante per il punto $(1,0)$ e parallela alla retta generata dal vettore $(-1,1)$.

Esempio. È data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $L(x) = (2x,3x)$. Per ogni $(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\begin{aligned} L^{-1}(b_1,b_2) &= \{x \in \mathbb{R} |\ (2x,3x) = (b_1,b_2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} |\ 2x = b_1 \text{ e } 3x = b_2\}. \end{aligned}$$

In particolare:

$$\begin{aligned} L^{-1}(0,0) &= \{x \in \mathbb{R} |\ 2x = 0 \text{ e } 3x = 0\} = \{0\}; \\ L^{-1}(4,6) &= \{x \in \mathbb{R} |\ 2x = 4 \text{ e } 3x = 6)\} = \{2\} \\ L^{-1}(1,0) &= \{x \in \mathbb{R} |\ 2x = 1 \text{ e } 3x = 0\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Proposizione Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $\underline{b} \in \mathrm{Im}(L)$. Fissata una preimmagine $\underline{v}_*$ di $\underline{b}$, si ha: (1) per ogni $\underline{z}$ in $\mathrm{Ker}(L)$, il vettore $\underline{v}_* + \underline{z}$ è una preimmagine di $\underline{b}$; (2) viceversa, ogni preimmagine $\underline{v}$ di $\underline{b}$ esiste un $\underline{z}$ in $\mathrm{Ker}(L)$ tale che $\underline{v} = \underline{v}_* + \underline{z}$. In simboli:

$$L^{-1}(\underline{b}) = \{\underline{v}_* + \underline{z} |\ \underline{z} \in \mathrm{Ker}(L)\}, \quad \text{in breve} \quad L^{-1}(\underline{b}) = \underline{v}_* + \mathrm{Ker}(L).$$

Dimostrazione.

(1) Per ogni $\underline{z}$ in $\mathrm{Ker}(L)$ si ha

$$L(\underline{v}_* + \underline{z}) = L(\underline{v}_*) + L(\underline{z}) = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}.$$

(2) Per ogni $\underline{v} \in V$ tale che $L(\underline{v}) = \underline{b}$, da $L(\underline{v}) = L(\underline{v}_*)$ segue

$$L(\underline{v}) - L(\underline{v}_*) = \underline{0}, \quad L(\underline{v} - \underline{v}_*) = \underline{0}, \quad \underline{v} - \underline{v}_* \in \mathrm{Ker}(L);$$

segue $\underline{v} = \underline{v}_* + (\underline{v} - \underline{v}_*)$ con $(\underline{v} - \underline{v}_*)$ in $\mathrm{Ker}(L)$.

Applicazione È data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $L(\underline{x}) = A\underline{x}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo: (1) determinare $\mathrm{Ker}(L)$; (2) per un qualche $\underline{b}$ scelto in $\mathrm{Im}(L)$, determinare $L^{-1}(\underline{b})$ in due modi: direttamente e usando la proposizione e le informazioni acquisite al punto (1).

Osserviamo che due qualsiasi righe di A sono linearmente indipendenti e le tre righe di sono linearmente dipendenti. Dunque

$$\dim(\mathrm{Im}(L)) = rg(A) = 2 \quad \text{e} \quad \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 4 - 2 = 2.$$

(1) $\mathrm{Ker}(L)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$, associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

applicando a questa matrice un procedimento di Gauss si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

a questa matrice corrisponde un sistema lineare omogeneo equivalente al sistema $A\underline{x} = \underline{0}$, specificamente

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema si può risolvere ricavando x_1 e x_2 in funzione di x_3, x_4 : si ottiene

$$x_1 = 3x_3 + 2x_4, \quad x_2 = -2x_3 - x_4 \qquad (x_3, x_4 \text{ libere}).$$

la soluzione generale è

$$(3x_3 + 2x_4, -2x_3 - x_4, x_3, x_4) = x_3(3, -2, 1, 0) + x_4(2, -1, 0, 1) \qquad (x_3, x_4 \text{ libere}).$$

Dunque

$$\mathrm{Ker}(L) = \langle (3, -2, 1, 0), (2, -1, 0, 1) \rangle.$$

(2) Le colonne della matrice A sono le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$; scegliamo $\underline{b} = L(\underline{e}_1 = (1, 0, 1)$.

(2') Direttamente. $L^{-1}(\underline{b})$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, che ha matrice completa

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right);$$

applicando a questa matrice un procedimento di Gauss si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

a questa matrice completa corrisponde un sistema lineare equivalente al sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, specificamente

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema si può risolvere ricavando x_1 e x_2 in funzione di x_3, x_4 : si ottiene

$$x_1 = 1 + 3x_3 + 2x_4, \quad x_2 = -2x_3 - x_4 \qquad (x_3, x_4 \text{ libere}).$$

la soluzione generale è

$$(1+3x_3+2x_4, -2x_3-x_4, x_3, x_4) = (1,0,0,0)+x_3(3,-2,1,0)+x_4(2,-1,0,1) \qquad (x_3, x_4 \text{ libere}).$$

Dunque

$$L^{-1}(1,0,1) = (1,0,0,0) + \langle(3,-2,1,0),(2,-1,0,1)\rangle.$$

(2") Usando la proposizione e le informazioni acquisite al punto (1). Sappiamo che

$\underline{e}_1 = (1,0,0,0)$ è una particolare preimmagine di $\underline{b} = (1,0,1)$

$\text{Ker}(L) = \langle(3,-2,1,0),(2,-1,0,1)\rangle$.

Dunque per la Proposizione di sopra

$$L^{-1}(1,0,1) = (1,0,0,0) + \langle(3,-2,1,0),(2,-1,0,1)\rangle.$$

–**Sistemi lineari** Per un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(\underline{x}) = A\underline{x}$, il problema della determinazione dell'insieme preimmagine di un vettore $\underline{b}$ di $\mathbb{R}^m$ si traduce nel problema della determinazione delle soluzioni del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$. Viceversa, il problema della determinazione delle soluzioni di un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ può essere riguardato come il problema della determinazione dell'insieme preimmagine del vettore $\underline{b}$ di $\mathbb{R}^m$ tramite l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(\underline{x}) = A\underline{x}$. In questo modo, si può trasferire ai sistemi lineari il discorso svolto sulle applicazioni lineari. In particolare, si ha il

Teorema[cfr. Th. di Rouchè-Capelli 6.2.9] Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ (A matrice $m \times n$) un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Allora

(1) il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa: $rg(A) = rg(A|\underline{b})$;

(2) in tal caso, l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ si ottiene sommando ad una soluzione $\underline{s}$ del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ lo spazio di dimensione $n - rg(A)$ delle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$,

$$\{\underline{x}|\ A\underline{x} = \underline{b}\} = \underline{s} + \{\underline{x}|\ A\underline{x} = \underline{0}\}.$$