Lezione del 23.04

Questa lezione si riferisce al Cap.7 “Determinante e inversa”, Par.7.1 “Definizione di determinante” e Par.7.2 “Calcolo del determinante: casi 2×2 e 3×3; Di seguito si riportano gli argomenti svolti, con solo un riferimento oppure in modo tanto dettagliato a secondo che il loro svolgimento sia stato più o meno simile a quello del testo.

Definizione. Le “matrici unità” di ordine 1, 2, 3, ... sono le matrici

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

In altri termini, la matrice unità di ordine n è la matrice I_n quadrata di ordine n tale che

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ i = j \\ 0 & \text{se } \ i \neq j \end{cases}$$

Definizione Sia n un intero positivo fissato. Una “funzione determinante di ordine n” è una funzione $\det_n : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1) per ciascun $j = 1, \ldots, n$ fissato, se tre matrici A, A', A'' quadrate di ordine n hanno le stesse righe tranne che la $j-$ma riga di A è uguale alla somma della $j-$ma riga di A' e della $j-$ma riga di A'', allora

$$\det_n(A) = \det_n(A') + \det_n(A'');$$

2) per ciascun $j = 1, \ldots, n$ fissato, se due matrici A, A' quadrate di ordine n hanno le stesse righe tranne che la $j-$ma riga di A è uguale al prodotto dello scalare λ per la $j-$me riga di A', allora

$$\det_n(A) = \lambda \det_n(A');$$

3) se una matrice A quadrata di ordine n ha due righe uguali, allora

$$\det_n(A) = 0;$$

4) il determinante della matrice unità I_n di ordine n è

$$\det_n(I_n) = 1.$$

Spesso si scrive brevemente det al posto di $\det_n$. Si dimostra che

Teorema. Per ciascun intero positivo n fissato, esiste una ed una sola funzione determinante di ordine n.

Osservazione. Dalla seconda proprietà segue la

(5) se una matrice quadrata A ha una riga nulla, allora $\det(A) = 0$.

Di seguito si mostra come si possano calcolare i determinanti usando un procedimento di Gauss

Esempio.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Definizione. Una “matrice diagonale” è una matrice quadrata del tipo

$$\left(\, a \,\right), \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \dots$$

In altri termini: una matrice A ̀diagonale se $A_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Come nell’esempio di sopra si può ricavare che:

il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elmenti sulla diagonale della matrice:

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdots d_n.$$

Proposizione. (Determinante e operazioni elementari per righe.) Per ogni matrice quadrata A,

(6) Se B è una matrice ottenuta da A scambiando due righe, allora

$$\det(B) = -\det(A);$$

(7) Se C è una matrice ottenuta da A sommando ad una riga un multiplo scalare di un’altra riga, allora

$$\det(C) = \det(A).$$

Dimostrazione. Nel caso $n = 2$ (dal quale si deduce il caso generale).

(6) Per ogni R_1, R_2 vettori riga in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_1 + R_2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 + R_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_2 \\ R_1 + R_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_2 \\ R_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dunque

$$0 = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_2 \\ R_1 \end{pmatrix}, \quad \text{da cui} \quad \det \begin{pmatrix} R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}.$$

(7) Per ogni R_1, R_2 vettori riga in $\mathbb{R}^2$ ed ogni scalare λ in $\mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 + \lambda R_1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_2 \\ \lambda R_1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Queste proprietà permettono di estendere il calcolo dei determinanti dalle matrici diagonali ad un un certo tipo più generale di matrici. Di seguito si mostra un fenomeno su alcuni esempi e poi si enuncia una proposizione generale.

Esempi.

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 10.$$

(alla prima riga si è sommato un multiplo della seconda; si è ottenuta una matrice diagonale e se ne è calcolato il determinante).

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 10.$$

(alla prima riga si è sommato un multiplo della seconda; si è ottenuta una matrice diagonale e se ne è calcolato il determinante).

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(una riga è nulla, dunque il determinante è 0).

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = -90$$

(alla seconda ed alla prima riga si sono sommati multipli della terza; alla prima riga si è sommato un multiplo della seconda; si è ottenuta una matrice diagonale e se ne è calcolato il determinante).

Definizione. Una "matrice triangolare superiore" è una matrice quadrata del tipo

$$\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad \cdots$$

In altri termini, una matrice quadrata A è triangolare superiore se $A_{ij} = 0$ per ogni $i > j$.

Ciascuna delle matrici considerate negli esempi di sopra è triangolare superiore. In generale, si ha la seguente proposizione

Proposizione Il determinante di una matrice triangolare superiore T è il prodotto dei suoi elementi sulla diagonale

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

Osservazione. Ogni matrice S quadrata a scala è triangolare superiore. Infatti, se S è una matrice quadrata a scala e $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$ sono gli indici di colonna dei suoi pivot, allora: $1 \leq j_1$ da cui $2 \leq j_2$ da cui $3 \leq j_3$ ... da cui $p \leq j_p$; nella seconda riga il primo elemento è 0, nella terza riga i primi due elementi sono 0, ..., nella $p-$ma riga i primi $p-1$ elementi sono 0, e gli elementi delle righe successive sono tutti 0; S è triangolare superiore.

Sempre le stesse proprietà permettono di estendere il calcolo dei determinanti a tutte le matrici. Infatti, una qualsiasi matrice quadrata A può essere trasformata mediante un procedimento di Gauss in una matrice a scala S, controllando le variazioni del determinante (solo eventuali cambi di segno), ogni tale matrice a scala S è anche triangolare superiore, e di tale matrice si sa calcolare il determinante.

Esempio.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -12$$

–**Formula esplicita per il determinante.**

Dalla definizione in termini di proprietà si possono ricavare anche formule esplicite per il determinante. Per le matrici 2×2 e si trova che

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc;$$

in altri termini: il determinate di una matrice di ordine 2 è il prodotto degli elementi sulla diagonale discendente meno il prodotto degli elementi sulla diagonale ascendente.

Questa formula è stata ricavata sul testo riconducendosi al caso delle matrici triangolari distinguendo due casi; a lezione è stata ricavata quasi direttamente dalla definizione come segue

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= ac\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + ad\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bc\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + bd\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 + ad - bc + 0 = ad - bc \end{aligned}$$

Per le matrici 3×3 si trova che

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = +aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi;$$

una regola mnemonica è data dalla "regola di Sarrus": si considera la tabella avente per colonne le tre colonne della matrice data seguite dalle prime sue due colonne

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

e si scrive la somma algebrica dei prodotti degli elementi sulle diagonali discendenti e meno i prodotti degli elementi sulle diagonali discendenti (cfr. Par.7.2).

Esempio. Il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad (k \text{ parametro } \in \mathbb{R})$$

si ottiene considerando la tabella

$$\begin{matrix} k & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \end{matrix}$$

come

$$k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2.$$

Scrivendo gli elementi della matrici come elementi con doppi indici, si ha:

Il determinante di una matrice di ordine 2 è dato da

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

si osserva che è una somma algebrica di due monomi di secondo grado; gli indici di riga in ciascuno dei due addendi sono nell'ordine 1 e 2; gli indici di colonna nel primo addendo sono nell'ordine 1 e 2 e nel secondo addendo sono nell'ordine 2 e 1; è premesso al primo addendo un + e al secondo un -.

Il determinante di una matrice di ordine 3 è dato da

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

si osserva che è una somma algebrica di 6 monomi di terzo grado; gli indici di riga in ciascuno dei sei addendi sono nell'ordine 1, 2, 3; gli indici di colonna dei vari addendi sono tutte le possibili permutazioni dei tre indici 1,2,3; a tre addendi è ptremesso un + e agli altri tre un -.

Il determinante di una matrice di ordine n è dato da una formula esplicita del tipo

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum \pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

dove la somma è estesa a tutte le $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$ permutazioni $j_1 j_2 \cdots j_n$ degli interi 1, 2, ..., n ed i segni sono dati da una certa regola. Il numero dei termini nella formula esplicita per il determinante di una matrice di ordine 4 è dunque 4!= 24 e per una di ordine 5 è 5!= 120. (Per approfondimenti cfr. Par.7.9).

Si prova che

Proposizione Il determinante di una matrice coincide col determinante della sua trasposta:

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Di conseguenza: il determinante può essere equivalentemente definito tramite proprietà per colonne, si ha una formula esplicita semplice per il determinante di una matrice triangolare inferiore, esiste un'altra versione della regola di Sarrus ...

–Determinanti, dipendenza e indipendenza lineare.

Teorema. Per ciascuna matrice A quadrata di ordine n le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) le righe di A sono linearmente indipendenti;

(2) A ha determinante diverso da zero;

(1') le colonne di A sono linearmente indipendenti.

Sappiamo già che (1) e (1') sono equivalenti. Idea della dimostrazione dell'equivalenza fra (1) e (2). Si applichi ad A un procedimento di Gauss e sia S la matrice a scala ottenuta. Si ha: le righe di A son linearmente indipendenti se e solo se le righe di S sono linearmente indipendenti se e solo se S è triangolare superiore con tutti gle lementi diagonali diversi da zero se e solo se il determinante di S è diverso da zero se e solo se il determinante di A è diverso da zero.

Applicazione. Per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad (k \text{ parametro } \in \mathbb{R})$$

si ha

$$\det(A) = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k-2).$$

Dunque: per $k = 1$ e $k = 2$ le righe di A sono linearmente dipendenti; per i restanti valori di k sono linearmente indipendenti.

–Determinante e prodotto di matrici

Teorema.(Binet) Il determinante della matrice prodotto di due matrici quadrate è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Questo teorema si verifica facilmente per matrici triangolari. Infatti: da una parte si ha

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ 0 & a_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & * & \dots & * \\ 0 & b_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_1b_1 & * & \dots & * \\ 0 & a_2b_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix} = a_1b_1a_2b_2\cdots a_nb_n;$$

dall'altra si ha

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ 0 & a_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} b_1 & * & \dots & * \\ 0 & b_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} = a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n;$$

e i due risultati sono uguali, per la commutatività del prodotto di numeri reali. A questo caso può essere ricondotto il caso generale.