Lezione del 03.05

Questa lezione si riferisce all'intero Cap.8 "Cambio di base". Sono stati svolti tutti gli argomenti del capitolo, ma in ordine diverso e con notazioni diverse. Si lascia la lettura del capitolo come opzionale e si propone di seguire l'impostazione data a lezione, che viene riportata dettagliatamente di seguito. Entrambe le impostazini si applicano agli stessi esercizi. Indice degli argomenti svolti:

1- Ennupla coordinata di un vettore rispetto ad una base. 1.1 Definizione; 1.2 Esempi; 1.3 Vettori in spazi $\mathbb{R}^n$.

2- Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi di codominio e dominio. 2.1 Definizione; 2.2 Relazione fondamentale; 2.3 Applicazioni lineari fra spazi $\mathbb{R}^n$.

3- Matrice di cambiamento di base. 3.1 Definizione; 3.2 Esempio; 3.3 Cambiamento di base in spazi $\mathbb{R}^n$.

4- Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici. 4.1 Teorema.

5- Inversione. 5.1 Proposizione; 5.1 Cambiamento di base nei due versi; 5.2 Esempio.

6- Relazione fra le matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare. 6.1 Teorema; 6.2 Esempio; 6.3 Estensione; 6.4 Applicazione.

1 Ennupla coordinata di un vettore rispetto ad una base.

1.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ una base ordinata di V. Allora ogni vettore $\underline{v}$ di V si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori della base, cioè esiste una ed una sola ennupla ordinata $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di scalari tale che

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \cdots + x_n\underline{v}_n;$$

questi scalari si dicono *coordinate* del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e la ennupla ordinata delle coordinate si dice in breve *ennupla coordinata* di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e si indica con $(\underline{v})_{\mathcal{B}}$. Dunque

$$(\underline{v})_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

D'ora innanzi salvo avviso contario tutte le basi saranno tacitamente assunte come basi ordinate.

1.2 Esempi. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

- Consideriamo la base canonica $\mathcal{C} : (1, 0), (0, 1)$ e il vettore $(3, 4)$. Si ha

$$(3, 4) = 3(1, 0) + 4(0, 1),$$

dunque la coppia coordinata di $(3, 4)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ è $((3, 4))_{\mathcal{C}} = (3, 4)$.

- Consideriamo la base $\mathcal{B} : (1, 0), (2, 1)$ e il vettore $(3, 4)$. L'uguglianza

$$(3, 4) = x_1(1, 0) + x_2(2, 1)$$

equivale al sistema di due uguaglianze $3 = x_1+2x_2$ e $4 = x_2$ che è soddisfatto dall'unica coppia $x_1 = -5$ $x_2 = 4$, dunque

$$(3, 4) = -5(1, 0) + 4(2, 1)$$

e la coppia coordinata di $(3, 4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $((3, 4))_{\mathcal{B}} = (-5, 4)$.

- Consideriamo la base $\mathcal{B}' : (2,1),(1,0)$ e il vettore $(3,4)$. Si ha

$$(3,4) = 4(2,1) - 5(1,0)$$

dunque la coppia coordinata di $(3,4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è $((3,4))_{\mathcal{B}'} = (4,-5)$.

1.3 Vettori in spazi $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\mathcal{C} : \underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Per ogni vettore $\underline{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ si ha

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + \cdots + x_n\underline{e}_n,$$

dunque la ennupla coordinata del vettore rispetto alla base $\mathcal{C}$ è il vettore stesso:

$$(\underline{v})_{\mathcal{C}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underline{v}.$$

Sia $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Per ogni vettore $\underline{v}$ in $\mathbb{R}^n$ l'equazione nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \cdots + x_n\underline{v}_n,$$

ha sempre una ed una sola soluzione, che è la ennupla coordinata di $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Questa equazione equivale a un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dunque; calcolare la ennupla coordinata di un vettore rispetto ad una base equivale a risolvere un sistema lineare che si sa a priori avere una ed una sola soluzine.

2 Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi di codominio e dominio.

2.1 Definizione. Siano V uno spazio vettoriale con una base ordinata $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e W uno spazio vettoriale con una base ordinata $\mathcal{B}' : \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$ e sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare. L'immagine di ciascuno degli n vettori della base $\mathcal{B}$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare degli m vettori della base $\mathcal{B}'$

$$\begin{aligned} L(\underline{v}_1) &= a_{11}\underline{w}_1 + a_{21}\underline{w}_2 + \cdots + a_{m1}\underline{w}_m \\ L(\underline{v}_2) &= a_{12}\underline{w}_1 + a_{22}\underline{w}_2 + \cdots + a_{m2}\underline{w}_m \\ &\vdots \\ L(\underline{v}_n) &= a_{1n}\underline{w}_1 + a_{2n}\underline{w}_2 + \cdots + a_{mn}\underline{w}_m \end{aligned}$$

$(a_{ij} \in \mathbb{R})$. La matrice che ha nelle colonne i coefficienti di queste scritture

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si dice *matrice di L rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$* e si indica con $L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$; volutamente, all'indice si scrive prima il simbolo della base del codominio e poi quello della base del dominio; un primo indizio della naturalezza di questa scelta è che il tipo della matrice $L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ è (numero dei vettori in $\mathcal{B}'$) $\times$ (numero dei vettori in $\mathcal{B}$). In breve: $L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ è la matrice che ha colonne le emmuple coordinata rispetto alla base $\mathcal{B}'$ delle immagini dei vettori di $\mathcal{B}$, in simboli:

$$L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left(\ (L(\underline{v}_1))_{\mathcal{B}'} \mid (L(\underline{v}_2))_{\mathcal{B}'} \mid \ldots \mid (L(\underline{v}_n))_{\mathcal{B}'} \ \right).$$

2.1 Relazione fondamentale. L è univocamente determinata dalle immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, e queste immagini sono univocamente determinate dalla matrice $L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$; dunque L è univocamente determinata dalla matrice $L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Ci si chiede per ciascun vettore $\underline{v} \in V$ quale relazione sussiste fra la emmupla coordinata di $L(\underline{v})$, la matrice di L, e la ennupla coordinata di $\underline{v}$, rispetto alle basi scelte.

Teorema Siano V uno spazio vettoriale con una base ordinata $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, W uno spazio vettoriale con una base ordinata $\mathcal{B}' : \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$ e $L : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora per ogni $\underline{v} \in V$ la colonna coordinata di $L(\underline{v})$ è il prodotto della matrice di L per la colonna coordinata di $\underline{v}$, rispetto alle basi scelte:

$$(L(\underline{v}))_{\mathcal{B}'} = L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \left((\underline{v})\right)_{\mathcal{B}}.$$

Verifichiamo il teorema su un esempio. La dimostrazione del teorema segue le stesse linee.

Sia: V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \underline{v}_2$, W uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B}' : \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$, $L : V \to W$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} L(\underline{v}_1) &= 2\underline{w}_1 + 3\underline{w}_2 + 4\underline{w}_3 \\ L(\underline{v}_2) &= 6\underline{w}_1 + 7\underline{w}_2 + 8\underline{w}_3; \end{aligned}$$

la matrice di L rispetto alle basi date è

$$L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Sia $\underline{v}$ in V con $(\underline{v})_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2)$; , allora

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2;$$

per la linearità di L si ha

$$L(\underline{v}) = x_1 L(\underline{v}_1) + x_2 L(\underline{v}_2) \underset{(1)}{=}$$

per le scritture dei vettori $L(\underline{v}_*)$ come combinazione lineare dei vettori $\underline{w}_*$ si ha

$$\begin{aligned} &\underset{(1)}{=} x_1(2\underline{w}_1 + 3\underline{w}_2 + 4\underline{w}_3) + x_2(6\underline{w}_1 + 7\underline{w}_2 + 8\underline{w}_3) \\ &= (2x_1 + 6x_2)\underline{w}_1 + (3x_1 + 7x_2)\underline{w}_2 + (4x_1 + 8x_2)\underline{w}_3); \end{aligned}$$

dunque

$$(L(\underline{v}))_{\mathcal{B}'} = (2x_1 + 6x_2, 3x_1 + 7x_2, 4x_1 + 7x_2).$$

Scrivendo i vettori come vettori colonna, si ha

$$(L(\underline{v})_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 7x_2 \\ 4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\underline{v})_{\mathcal{B}}.$$

2.3 Applicazioni lineari fra spazi $\mathbb{R}^n$. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Scelte nel dominio e nel codominio le basi canoniche, si ha che $L_{\mathcal{CC}}$ è la matrice che ha colonne le emmuple immagini dei vettori di $\mathcal{C}$, in simboli:

$$L_{\mathcal{CC}} = \left(\ L(\underline{e}_1) \mid \ldots \mid L(\underline{e}_n)\ \right).$$

La relazione fondamentale afferma che per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ la colonna $L(\underline{v})$ è il prodotto della matrice di L per la colonna $\underline{v}$

$$L(\underline{v}) = L_{\mathcal{CC}}\ \underline{v}.$$

Si ritrova così il teorema di rappresentazione matriciale di applicazioni lineari fra spazi $\mathbb{R}^n$.

3 Matrice di cambiamento di base.

2.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e $\mathcal{B}' : \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ due basi ordinate di V. Ciascuno dei vettori della base $\mathcal{B}$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}'$

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= a_{11}\underline{w}_1 + \cdots + a_{n1}\underline{w}_n \\ &\vdots \\ \underline{v}_n &= a_{1n}\underline{w}_1 + \cdots + a_{nn}\underline{w}_n \end{aligned}$$

($a_{ij} \in \mathbb{R}$). La matrice che ha come colonne i coefficienti di queste scritture, cioè le ennuple coordinata rispetto alla base $\mathcal{B}'$ dei vettori di $\mathcal{B}$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\ (\underline{v}_1)_{\mathcal{B}'} \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ (\underline{v}_n)_{\mathcal{B}'} \ \right)$$

si dice *matrice di cambio di base verso $\mathcal{B}'$ da $\mathcal{B}$*. Questa matrice coincide con la matrice dell'identità id di V rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$:

$$\left(\ (\underline{v}_1)_{\mathcal{B}'} \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ (\underline{v}_n)_{\mathcal{B}'} \ \right) = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Dunque, dal Teorema di sopra segue la

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e $\mathcal{B}' : \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ due basi ordinate di V. Allora per ogni $\underline{v} \in V$ la colonna coordinata di $\underline{v}$ rispetto a B$'$ è il prodotto della matrice di cambio verso $\mathcal{B}'$ da $\mathcal{B}$ per la colonna coordinata di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$,

$$(\underline{v})_{\mathcal{B}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\underline{v})_{\mathcal{B}}.$$

3.2 Esempio. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ consideriamo la base canonica $\mathcal{C} : (1,0), (0,1)$ e la base $\mathcal{B} : (1,3), (1,4)$.

La matrice di cambio verso $\mathcal{C}$ da $\mathcal{B}$ è

$$\mathrm{id}_{\mathcal{CB}} = \left(\ ((1,3))_{\mathcal{C}} \quad ((1,4))_{\mathcal{C}} \ \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice di cambio verso $\mathcal{C}$ da $\mathcal{B}$ è

$$\mathrm{id}_{\mathcal{BC}} = \left(\ ((1,0))_{\mathcal{B}} \quad ((0,1))_{\mathcal{B}} \ \right)$$

ed è meno immediata da determinare. Vedremo in seguito come farlo in un modo efficiente.

3.3 Cambiamento di base in spazi $\mathbb{R}^n$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo la base canonica $\mathcal{C} : \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ e una base $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$.

La matrice di cambio verso $\mathcal{C}$ da $\mathcal{B}$ è

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left(\ (\underline{v}_1)_{\mathcal{C}} \mid \ldots \mid (\underline{v}_n)_{\mathcal{C}}\ \right) = \left(\ \underline{v}_1 \mid \ldots \mid \underline{v}_n\ \right),$$

la matrice quadrata di ordine n con colonne i vettori della base $\mathcal{B}$.

4 Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici.

Teorema. Siano V, W, Z spazi vettoriale con una base ordinata rispettivamente $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ e $F : V \to W$ e $G : W \to Z$ due applicazioni lineare. Allora la matrice della funzione composta $G \circ F$ rispetto alle basi $\mathcal{B}''$ e $\mathcal{B}$ ùguale al prodotto delle matrici di G rispetto alle basi $\mathcal{B}''$ e $\mathcal{B}'$ e di F rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$

$$(G \circ F)_{\mathcal{B}''\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Dimostrazione.

Da una parte, per la relazione fondamentale sulla matrice di $G \circ F$ rispetto alle basi $\mathcal{B}''$ e $\mathcal{B}$ si ha che per ogni $\underline{v} \in V$

$$((G \circ F)(\underline{v}))_{\mathcal{B}''} = (G \circ F)_{\mathcal{B}''\mathcal{B}}\ (\underline{v})_{\mathcal{B}}.$$

Dall'altra parte, per la relazione fondamentale sulle matrici di G rispetto alle basi $\mathcal{B}''$ e $\mathcal{B}'$ e di F rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$ si ha che per ogni $\underline{v} \in V$

$$(G(F(\underline{v})))_{\mathcal{B}''} = G_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'}\ (F(\underline{v}))_{\mathcal{B}'} = G_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\ (\underline{v})_{\mathcal{B}}.$$

Dalla comparazione delle due relazioni ottenute segue la tesi.

5 Inversione.

5.1 Proposizione. Siano V, W due spazi vettoriali della stessa dimensione con basi ordinate rispettive $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare invertibile. Allora rispetto alle dovute basi, la matrice dell'inversa di F è l'inversa della matrice di F

$$\left(F^{-1}\right)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left(F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

Dimostrazione. L'inversa F^{-1} di F soddisfa le relazioni

$$F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_V \quad F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_W.$$

Dunque le matrici di F^{-1} e di F rispetto alle dovute basi soddisfano le relazioni

$$\left(F^{-1}\right)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \ (\mathrm{id}_V)_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \quad F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \left(F^{-1}\right)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \ (\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'};$$

si osserva che

$$(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n = (\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$$

dove I_n è la matrice unità di ordine n ed n è la dimensione comune a V e W. La tesi segue dalla definizione di matrice inversa.

5.2 Cambiamento di base nei due versi. Nel caso particolare in cui i due spazi vettoriali coincidano con un'unico spazio V e l'applicazione lineare sia al'identità su V si ha che la matrice di cambio di base verso $\mathcal{B}'$ da $\mathcal{B}$ e la matrice di cambio di base verso $\mathcal{B}$ sa $\mathcal{B}'$ sono l'una l'inversa dell'altra, in simboli:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left(\mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left(\mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

Ciò permette di ottenere una matrice di cambiamento di base dall'altra, al prezzo del calcolo di un'inversione. Tipicamente, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è immediato scrivere la matrice di cambiamento verso la base canonica $\mathcal{C}: \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ da una base $\mathcal{B}: \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ in quanto

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left(\ \underline{v}_1 \mid \ldots \mid \underline{v}_n \ \right)$$

e si può ricavare la matrice di cambiamento verso la base $\mathcal{B}$ dalla base canonica $\mathcal{C}$ come

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \left(\ \underline{v}_1 \mid \ldots \mid \underline{v}_n \ \right)^{-1}.$$

- **5.2 Esempio.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ consideriamo la base canonica $\mathcal{C}: (1,0), (0,1)$ e la base $\mathcal{B}: (1,3), (1,4)$. La matrice di cambio verso $\mathcal{C}$ da $\mathcal{B}$ è

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e la matrice di cambio verso $\mathcal{B}$ da $\mathcal{C}$ si ottiene come

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 Relazione fra le matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare.

6.1. Sia dato uno spazio vettoriale. Fissata una sua base, ciascuna applicazione lineare dello spazio in sè stesso è rappresentata da una matrice. Ci chiediamo cosa succede cambiando base, in altri termini quale relazione sussiste fra le matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto alle varie basi.

Teorema Sia V uno spazio vettoriale, siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V e sia $F: V \to V$ un'applicazione lineare. Allora la matrice di F rispetto a $\mathcal{B}'$ è uguale al prodotto della matrice di cambio verso $\mathcal{B}'$ da $\mathcal{B}$ per la matrice di F rispetto a $\mathcal{B}$ per la matrice cambio verso $\mathcal{B}$ da $\mathcal{B}'$, in simboli

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} F_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \ \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'};$$

poichè le due matrici di cambio sono l'una l'inversa dell'altra, questa relazione può essere scritta anche nei due modi seguenti

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} F_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \left(\mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)^{-1};$$

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = \left(\mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\right)^{-1} F_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \ \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la sequenza di applicazioni lineari fra spazi vettoriali con basi fissate

$$\underset{\mathcal{B}'}{V} \xrightarrow{\mathrm{id}_V} \underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{F} \underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{\mathrm{id}_V} \underset{\mathcal{B}'}{V}.$$

Per il teorema sulla relazione fra composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici si ha

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = (\mathrm{id}_V \circ F \circ \mathrm{id}_V)_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} F_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \ \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

6.2 Esempio. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ consideriamo la base canonica $\mathcal{C}: (1,0), (0,1)$, la base $\mathcal{B}: (3,1), (1,0)$ e l'applicazione lineare

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = (5x + 2y, 3x + y).$$

La matrice di F rispetto alla base $\mathcal{C}$ è

$$F_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \left(\ F(1,0) \quad F(0,1) \ \right) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ si puo' ottenere come

$$F_{\mathcal{BB}} = \mathrm{id}_{\mathcal{BC}} F_{\mathcal{CC}} \mathrm{id}_{\mathcal{CB}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{CB}})^{-1} F_{\mathcal{CC}} \mathrm{id}_{\mathcal{CB}}$$

dunque

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{BB}} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -13 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.2 Estensione. Sia dati un primo ed un secondo spazio vettoriale. Fissata una base nei due spazi, ciascuna applicazione lineare dal primo spazio al secondo è rappresentata da una matrice. Ci chiediamo cosa succede cambiando base nei due spazi, in altri termini quale relazione sussiste fra le matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto alle varie basi.

Teorema Sia V uno spazio vettoriale con due basi ordnate $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, sia W uno spazio vettoriale con due basi ordnate $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$, e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora la matrice di F rispetto a $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$ è uguale al prodotto della matrice di cambio verso $\mathcal{B}'$ da $\mathcal{A}'$ per la matrice di F rispetto a $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}$ per la matrice cambio verso $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, in simboli

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{A}'} F_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} \, \mathrm{id}_{\mathcal{AB}}.$$

La dimostrazione segue le stesse linee del caso particolare di un'unico spazio vettoriale.

6.4 Applicazione.[Es.8.5.8 p.190]. Si determini un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}F = \langle (1,1,0), (0,1,-1) \rangle$ e $\mathrm{Im}F = \langle (2,0,1) \rangle$. Si determini la matrice di F rispetto alla base canonica.

Svolgimento. Osserviamo che le richieste su F sono compatibili con il teorema della dimensione. Infatti, si chiede che $\mathrm{Ker}F$ sia un certo sottospazio di dimensione 2, che $\mathrm{Im}F$ sia un certo sottospazio di dimensione 1, che il dominio di F abbia dimensione 3 e 2+1=3.

Costruiamo una base di $\mathbb{R}^3$ estendendo la base di $\mathrm{Ker}F$, ad esempio

$$\mathcal{B} : (1,1,0), (0,1,-1), (0,0,1)$$

e costruiamo una base di $\mathbb{R}^3$ estendendo la base di $\mathrm{Im}F$, ad esempio

$$\mathcal{D} : (2,0,1), (0,1,0), (0,0,1).$$

Definiamo F sui vetori della base $\mathcal{B}$ ponendo

$$F(1,1,0) = (0,0,0), \quad F(0,1,-1) = (0,0,0), \quad F(0,0,1) = (2,1,0).$$

Allora la matrice di F rispetto alle basi $\mathcal{D}$ e $\mathcal{B}$ è

$$F_{\mathcal{DB}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e la matrice di F rispetto alla base canonica è

$$F_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{D}} F_{\mathcal{D}\mathcal{B}} \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{D}} F_{\mathcal{D}\mathcal{B}} \left(\mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\right)^{-1}$$

dunque

$$F_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dots$$

Si lascia la lettore di svolgere il calcolo e soprattutto di controllare l'esattezza del risultato.