Lezioni del 07.05 e 10.05

In queste lezioni si sono considerate le applicazioni lineari di uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè, si è posto il problema della diagonalizzabilità, si sono introdotte le nozioni di autovettore ed autovalore e si sono presentati i primi passi della relativa teoria: caratterizzazione degli autovalori come radici del polinomio caratteristico, indipendenza lineare di autovettori associati ad autovalori distinti, diagonalizzabilità di applicazioni lineari con n autovalori distinti, molteplicità algebrica e geometrica di una autovalore, diagonalizzabilità di applicazioni lineari aventi polinomio caratteristico completamente riducibile e per ciascun autovalore molteplicità algebrica e geometrica uguali. Si è scelto di sviluppare l'argomento prima in un modo nel quale le applicazioni lineari compaiono in primo piano, e le matrici compaiono solo come rappresentazioni di applicazioni; poi si svilupperà l'argomento in un modo nel quale compaiono solo matrici. Nel Testo invece i due modi vengono sviluppati in parallelo. Il riferimento è il Cap.9 "Autovalori e autovettori", esclusa la Prop.9.2.18.

Posizione del problema. Prima formulazione ed esempio introduttivo [cfr. Es.9.1.1].

Definizione di applicazione lineare diagonalizzabile [cfr. Def.9.1.2]. Data un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, determinare se possibile una base ordinata $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ di $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice $T_\mathcal{B}$ di T rispetto a $\mathcal{B}$ sia diagonale

$$T_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

e dunque, scritti i vettori di $\mathbb{R}^n$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$

$$T(x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \cdots + x_n\underline{v}_n) = \lambda_1 x_1\underline{v}_1 + \lambda_2 x_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n x_n\underline{v}_n.$$

Una tale applicazione lineare si dice *diagonalizzabile.*

Per addentrarsi nel problema posto, si introduce la seguente

Definizione di autovettore ed autovalore. Sia data un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si dice che un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ in $\mathbb{R}^n$ è un *autovettore* di T se esiste un λ in $\mathbb{R}$ tale che

$$T(\underline{v}) = \lambda\underline{v};$$

un tale scalare λ è univocamente determinato da $\underline{v}$, e si dice *autovalore* di T associato a $\underline{v}$.

Osservazione. Siano date un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e una base ordinata $\underline{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ di $\mathbb{R}^n$. Allora la matrice $T_\mathcal{B}$ è diagonale con elementi diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se e solo se

$$T(\underline{v}_1) = \lambda_1\underline{v}_1,\ \ldots,\ T(\underline{v}_n) = \lambda_n\underline{v}_n,$$

cioè $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono autovettori di T con autovalori associati $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. In particolare si ha la

Proposizione. Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se esistono n autovettori di T che formano una base di $\mathbb{R}^n$.

Esempio di applicazione lineare non diagonalizzabile [cfr. Es.9.1.6].

Matrice caratteristica e polinomio caratteristico. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare e sia $T_{\mathcal{C}} = A$ la matrice di T rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$, così che $T(\underline{v}) = A\underline{v}$ per ogni $\underline{v}$ in $\mathbb{R}^n$. Per definizione, un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ è un autovettore di T con autovalore associato λ se e solo se $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ cioè

$$A = \lambda\underline{v};$$

questa uguaglianza è equivalente all'uguaglianza

$$(A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}.$$

La matrice $A - \lambda I_n$ e il suo determinante si dicono rispettivamente *matrice caratteristica* e *polinomio caratteristico* di A nell'indeterminata λ. Il polinomio caratteristico di A si indica con $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n);$$

questo polinomio ha grado n.

Esempio. Per un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresentata rispetto alla base canonica da una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la matrice caratteristica è

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

e il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

Teorema. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare e sia $T_{\mathcal{C}} = A$ la matrice di T rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$. Allora uno scalare è un autovalore di T se e solo se è una radice del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ di A; in particolare, T può avere al massimo n autovalori distinti.

Dimostrazione. Uno scalare λ è un autovettore di T se e solo se

esiste un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ se e solo se

esiste un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $(A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}$ se e solo se

$rg(A - \lambda I_n) < n$ se e solo se

$\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Proposizione. Tutte le matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico; questo polinomio si dice polinomio caratteristico di T e si indica con $p_T(\lambda)$.

Dimostrazione. Basta provare che se $T_{\mathcal{C}} = A$ e $T_{\mathcal{B}} = A'$ sono le matrici di T rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ e ad una base $\mathcal{B}$, allora $p_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$.

Posto $\mathrm{id}_{\mathcal{CB}} = P$ si ha

$$A' = T_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{BC}} T_{\mathcal{C}}\ \mathrm{id}_{\mathcal{CB}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{CB}})^{-1} T_{\mathcal{C}}\ \mathrm{id}_{\mathcal{CB}} = P^{-1}AP.$$

Osserviamo che

$$A' - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda I_n = P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I_n P = P^{-1}(A - \lambda I_n)P.$$

Per il teorema di Binet e per la commutatività dei numeri reali si ha

$$\begin{aligned}\det(A' - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P) \\ &= (\det(P))^{-1}\det(A - \lambda I_n)\det(P) = \det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda).\end{aligned}$$

Nei seguenti esempi usiamo queste proposizioni per determinare autovalori e autovettori e stabilire la diagonalizzabilità di alcune applicazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ in sè.

Esempio 1. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x + y, 3x + 2y)$; si ha

$$T_{\mathcal{C}} = A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica e il polinomio caratteristico di A sono

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix},$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

Le radici di $p_A(\lambda)$ sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$. Dunque T ha esattamente due autovalori: $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$.

Determiniamo ora gli autovettori cui sono associati questi autovalori.

Autovettori con autovalore $\lambda = 1$. Sono i vettori $\underline{v} \neq \underline{0}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $T(\underline{v}) = \underline{v}$ cioè $(A - I_2)\underline{v} = \underline{0}$, cioè

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0};$$

questo è un sistema lineare omogeneo di due equazioni in due incognite, che equivale alla singola equazione

$$3x + y = 0,$$

che ha soluzioni del tipo $(x, -3x) = x(1, -3)$ con x variabile libera. Abbiamo trovato che gli autovettori con autovalore $\lambda = 1$ sono i multipli scalari non nulli del vettore $\underline{a} = (1, -3)$.

Autovettori con autovalore $\lambda = 5$. Sono i vettori $\underline{v} \neq \underline{0}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $T(\underline{v}) = 5\underline{v}$ cioè $(A - 5I_2)\underline{v} = \underline{0}$, cioè

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0};$$

questo è un sistema lineare omogeneo di due equazioni in due incognite, che equivale alla singola equazione

$$-x + y = 0,$$

che ha soluzioni del tipo $(x, x) = x(1, 1)$ con x variabile libera. Abbiamo trovato che gli autovettori con autovalore $\lambda = 5$ sono i multipli scalari non nulli del vettore $\underline{b} = (1, 1)$.

La sequenza di autovettori $\mathcal{B} : \underline{a}, \underline{b}$ con autovalori 1 e 5 è una base di $\mathbb{R}^2$, e la matrice di T rispetto a quasta base è

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

dunque, scritti i vettori di $\mathbb{R}^2$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$, si ha

$$T(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \alpha\underline{a} + 5\beta\underline{b}.$$

T è diagonalizzabile.

Esempio 2. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $T(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ e $T(\underline{e}_2) = -\underline{e}_1 + \underline{e}_2$; si ha

$$T_{\mathcal{C}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica e il polinomio caratteristico di A sono

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1.$$

$p_A(\lambda)$ non ha radici in $\mathbb{R}$. Dunque T non ha autovalori e nemmeno autovettori, e non e diagonalizzabile. (La situazione cambia ampliando il campo degli scalari da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ... T risulta diagonalizzabile su $\mathbb{C}$).

Esempio 3. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, y)$; si ha

$$T_{\mathcal{C}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica e il polinomio caratteristico di A sono

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

$p_A(\lambda)$ ha due radici coincidenti in $\lambda = 1$. Dunque T ha esattamente un autovalore: $\lambda = 1$.

Gli autovettori con autovalore $\lambda = 1$ sono i vettori $\underline{v} \neq \underline{0}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $T(\underline{v}) = \underline{v}$ cioè $(A - I_2)\underline{v} = \underline{0}$, cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0};$$

questo è un sistema lineare omogeneo di due equazioni in due incognite x e y, che equivale alla singola equazione

$$2y = 0,$$

che ha soluzioni del tipo $(x, 0) = x(1, 0)$ con x variabile libera.

Con questi vettori non si può ottenere alcuna base di $\mathbb{R}^2$. L'applicazione lineare T non è diagonalizzabile. (La situazione non cambia ampliando il campo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.)

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare e sia λ un autovalore di A. Consideriamo l'insieme costituito dagli autovettori di T associati all'autovalore λ e dal vettore nullo, cioè

$$\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n : \; T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\}.$$

Questo insieme è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti è non vuoto, e per ogni due vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ ed ogni due scalari α e β da

$$T(\underline{a}) = \lambda \underline{a} \quad \text{e} \quad T(\underline{b}) = \lambda \underline{b}$$

segue

$$T(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) = \lambda(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b})$$

(si lascia la verifica al lettore). Questo sottospazio si dice *autospazio* di T associato all'autovalore λ e si indica con V_λ.

Osservazione. Nell'esempio 1 si ha che, comunque si prendano un autovettore associato all'autovalore 1 ed un autovettore associato all'autovalore 5, questi sono linearmente indipendenti. Più in generale, si ha

Teorema. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare e siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p$ autovettori di T con autovalori associati $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ a due a due distinti. Allora $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p$ sono linearmente indipendenti.

Idea della dimostrazione. Il caso $n = 1$ è ovvio in quanto ciascun autovettore è diverso da $\underline{0}$.

Consideriamo il caso $n = 2$. Consideriamo un'uguaglianza

$$x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 = \underline{0} \qquad (x_1, x_2 \;\text{ in }\; \mathbb{R});$$

applicando ad entrambi i membri l'applicazione T si ottiene la seconda uguaglianza

$$\lambda_1 x_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 x_2 \underline{v}_2 = \underline{0};$$

sottraendo alla seconda uguaglianza la prima moltiplicata per λ_1 si ha

$$(\lambda_2 - \lambda_1) x_2 \underline{v}_2 = \underline{0};$$

da questa uguaglianza, essendo per ipotesi $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$ e $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, si ha $x_2 = 0$; la prima uguaglianza diviene dunque $x_1 \underline{v}_1 = \underline{0}$, ed essendo $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$ si ha $x_1 = 0$. Ciò significa che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

Consideriamo il caso $n = 3$. Consideriamo un'uguaglianza

$$x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3 = \underline{0} \qquad (x_1, x_2, x_3 \;\text{ in }\; \mathbb{R});$$

applicando ad entrambi i membri l'applicazione T si ottiene la seconda uguaglianza

$$\lambda_1 x_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 x_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 x_3 \underline{v}_3 = \underline{0};$$

sottraendo alla seconda uguaglianza la prima moltiplicata per λ_1 si ha

$$(\lambda_2 - \lambda_1) x_2 \underline{v}_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) x_3 \underline{v}_3 = \underline{0};$$

dalla questa uguaglianza, essendo per il passo precedente $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ linearmente indipendenti e per ipotesi $\lambda_2 - \lambda_1$ e $\lambda_3 - \lambda_1$ diversi da 0, si ha $x_2 = x_3 = 0$; la prima uguaglianza diviene dunque $x_1 \underline{v}_1 = \underline{0}$, ed essendo $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$ si ha $x_1 = 0$. Ciò significa che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

In modo analogo si riconduce il caso p al caso $p - 1$.

Corollario. Un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in sè avente n autovalori distinti è diagonalizzabile.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, n qualsiasi autovettori associati agli n autovalori sono linearmente indipendenti, dunque formano una base di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica e il polinomio caratteristico di A sono

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix},$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda).$$

Le radici di $p_A(\lambda)$ sono $\lambda = 1$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$, e questi sono gli autovalori di T.

Per il Corollario, tre qualsiasi autovettori $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ di T associati rispettivamente agli autovalori 1, 3, 4 formano una base di $\mathbb{R}^3$; rispetto a questa base T è rappresentata dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

e l'azione di T è descritta da

$$T(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}) = \alpha\underline{a} + 3\beta\underline{b} + 5\gamma\underline{c}.$$

Determiniamo l'autospazio V_1 (la determinazione degli altri autospazi è lasciata al lettore). Sono i vettori $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $T(\underline{v}) = \underline{v}$ cioè $(A - I_3)\underline{v} = \underline{0}$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0};$$

questo è un sistema lineare omogeneo di tre equazioni in tre incognite x, y, z, che equivale all sistema di due equazioni

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \qquad\quad z = 0 \end{cases};$$

che ha soluzioni del tipo $(-y, y, 0) = y(-1, 1, 0)$ con y variabile libera. Abbiamo trovato che l'autospazio V_1 associato all'autovalore $\lambda = 1$ è il sottospazio generato dal vettore $(-1, 1, 0)$

$$V_1 = \langle(-1, 1, 0)\rangle.$$

Molteplicità. Ricordiamo un teorema ed una definizione di algebra elementare dei polinomi in una variabile. Una delle conseguenze dell'algoritmo della divisione per i polinomi è il Teorema di Ruffini:

> Un polinomio in una variabile x che ha una radice $x = r$ è divisibile per $x - r$; in altri termini: siano $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ed $r \in \mathbb{R}$ con $p(r) = 0$, allora esiste un $p_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che
> $$p(x) = (x - r)\ p_1(x).$$

Iterando questo teorema si ha

> siano $p(x)$ un polinomio non nullo in $\mathbb{R}[x]$ e sia $r \in \mathbb{R}$ una sua radice, allora esistono un numero intero positivo m ed un polinomio $p_m(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ tali che
> $$p(x) = (x - r)^m\ p_m(x), \qquad \text{con}\ \ p_m(r) \neq 0.$$
> L'intero positivo m si dice *molteplicità* della radice r.

Definizione. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare, e sia $\bar{\lambda}$ un autovalore di T. Si dice *molteplicità algebrica* di $\bar{\lambda}$ la molteplicità di $\bar{\lambda}$ come radice del polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ di T; Si dice *molteplicità geometrica* di $\bar{\lambda}$ la dimensione dell'autospazio $V_{\bar{\lambda}}$ associato a $\bar{\lambda}$.

Teorema. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Se il polinomio caratteristico di T si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$ e ogni autovalore di T ha molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica, allora T è diagonalizzabile. Di più, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sono gli autovalori distinti di T con molteplicità algebrica/geometrica rispettiva $m_1, \ldots, m_p$, se $\mathcal{B}_1$ è una base di V_{λ_1}, ..., $\mathcal{B}_p$ è una base di V_{λ_p} allora la sequenza di vettori $\mathcal{B} : \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e la matrice $T_{\mathcal{B}}$ è diagonale con elementi diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_1$ (m_1 volte) ... $\lambda_p, \ldots, \lambda_p$ (m_p volte).

(Idea della dimostrazione. Il caso di un solo autovalore è banalmente vero. Consideriamo il caso di due autovalori α, β di mopltepliciità algebrica rispettiva q ed r. Essendo per ipotesi il polinomio caratteristico di T completamente fattorizzabile su $\mathbb{R}$, si ha
$$P_T(\lambda) = \pm(\lambda - \alpha)^q(\lambda - \beta)^r.$$
Comparando i gradi ai due membri si ottiene
$$n = q + r.$$
Per l'ipotesi di uguaglianza fra molteplicità algebriche e geometriche, gli autospazi V_α e V_β hanno dimensioni q ed r. Siano $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_q$ e $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_r$ basi ordinate rispettive di V_α e V_β. Consideriamo i vettori
$$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_q, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_r.$$
Questi vettori sono in numero di $q+r = n$; proviamo che sono linearmente indipendenti, e da ciò deduciamo che sono una base di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo dunque un'uguaglianza
$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_q\underline{a}_{m_1} + y_1\underline{b}_1 + \cdots + y_r\underline{b}_r = \underline{0} \qquad x_i, y_j \in \mathbb{R}.$$
Applicando l'applicazione T ad entrambi i membri si ottiene una seconda uguaglianza
$$\alpha x_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha x_q\underline{a}_q + \beta y_1\underline{b}_1 + \cdots + \beta y_r\underline{b}_r = \underline{0}.$$
Sottraendo alla seconda uguaglianza la prima moltiplicata per α si ottiene l'uguaglianza
$$(\beta - \alpha)y_1\underline{b}_1 + \cdots + (\beta - \alpha)y_r\underline{b}_r = \underline{0},$$

dalla quale, essendo $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_r$ linearmente indipendenti ed essendo $\beta - \alpha \neq 0$ si ottiene $y_1 = \cdots = y_r = 0$. Dunque la prima uguaglianza diviene

$$x_1 \underline{a}_1 + \cdots + x_q \underline{a}_q = \underline{0},$$

e da questa, essendo $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_q$ linearmente indipendenti, si ottiene $x_1 = \cdots = x_q = 0$.

In modo analogo si riconduce il caso p al caso $p-1$.)

Esempio 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica e il polinomio caratteristico di A sono

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(-\lambda).$$

Le radici di $p_A(\lambda)$ sono: $\lambda = 2$ con molteplicità due, $\lambda = 0$ con molteplicità uno; dunque gli autovalori di T sono: $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica due, $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica uno.

L'autospazio V_2 è costituito dai vettori $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $T(\underline{v}) = 2\underline{v}$ cioè $(A - 2I_3)\underline{v} = \underline{0}$, cioè

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0};$$

questo è un sistema lineare omogeneo di tre equazioni in tre incognite x, y, z, che equivale alla singola equazione

$$-x + z = 0,$$

che ha soluzioni del tipo $(x, y, x) = x(1,0,1) + y(0,1,0)$ con x, y variabili libere. Abbiamo trovato che l'autospazio V_2 è generato dai vettori $\underline{a}_1 = (1,0,1)$ e $\underline{a}_2 = (0,1,0)$ che sono linearmente indipendenti. L'autovalore 2 ha dunque molteplicità algebrica e geometrica uguali a due.

L'autospazio V_0 è costituito dai vettori $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $T(\underline{v}) = \underline{0}$ cioè $A\underline{v} = \underline{0}$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0};$$

questo è un sistema lineare omogeneo di tre equazioni in tre incognite x, y, z, che equivale al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases},$$

che ha soluzioni del tipo $(x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$ con x variabile libera. Abbiamo trovato che l'autospazio V_0 è generato dal vettore $\underline{b} = (1, 0, -1)$. L'autovalore 0 ha dunque molteplicità algebrica e geometrica uguali a uno.

Abbiamo trovato che T ha polinomio caratteristico completamente farrorizzabile ed ha autovalori con molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica. Per il teorema precedente, T è diagonalizzabile e la sequenza di autovettori $\mathcal{B} : \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{b}$ è una base di $\mathbb{R}^3$; la matrice di T rispetto a quasta base è

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$