Lezioni del 14.05 e 17.05

In queste lezioni si sono svolti i seguenti argomenti. Ripresa del teorema generale che fornisce condizioni che implicano la diagonalizzabilità, indebolimento delle ipotesi, e Teorema inverso. Esercizi su problemi con parametri. Applicazione dell'idea di cambiamento di base alla ricerca di un polinomio con grafico passante per dati punti. Applicazione della teoria di autovettori ed autovalori allo studio dell'evoluzione di un complesso di dati che variano nel tempo secondo una legge lineare fissata.

Al termine della lezione scorsa abbiamo enunciato il

Teorema 1. *Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare.*

Se sono soddisfatte le condizioni

- il polinomio caratteristico di T si fattorizza completamente;

- ciascun autovalore di T ha molteplicità geometrica uguale alla moltplicitaà algebrica;

allora T è diagonalizzabile.

In tal caso, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sono gli autovalori distinti di T e $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ sono basi ordinate degli autospazi $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_p}$, allora la sequenza $\mathcal{B} : \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e la matrice $T_{\mathcal{B}}$ è diagonale con elementi diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dove ciascun λ_i è ripetuto secondo la sua molteplicità geometrica/algebrica.

Abbiamo anche descritto l'idea della dimostrazione. Da quella descrizione segue che nelle ipotesi la seconda condizione può essere sostituita con la condizione più debole

- ciascun autovalore ha molteplicità geometrica maggiore o uguale alla molteplicitaà algebrica.

Osserviamo che questa condizione è banalmente soddisfatta dagli autovalori che hanno molteplicità algebrica uno.

Vale anche l'inverso del Teorema di sopra:

Teorema 2. *Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Se T è diagonalizzabile allora sono soddisfatte le condizioni*

- il polinomio caratteristico di T si fattorizza completamente;

- ciascun autovalore di T ha molteplicità geometrica uguale alla moltplicitaà algebrica.

Di questo teorema non diamo la dimostrazione.

Esercizio. È data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si chiede di determinare i valori di k per i quali l'applicazione lineare T è diagonalizzabile, e per tali valori scrivere una matrice diagonale che rappresenta T.

Il polinomio caratteristico di T è

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ k & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 - k.$$

L'equazione

$$\lambda^2 - 1 - k = 0, \qquad \text{cioè} \qquad \lambda^2 = 1 + k$$

nell'incognita reale λ ha due soluzioni distinte oppure due soluzioni coincidenti oppure nessuna soluzione secondo che $1+k > 0$ oppure $1+k = 0$ oppure $1+k < 0$ cioè seondo che $k > -1$ oppure $k = -1$ oppure $k < -1$; nel primo caso si hanno le due soluzioni distinte $\sqrt{1+k}$ e $-\sqrt{1+k}$, e nel secondo si ha la soluzione 0 con molteplicità 2.

(1) se $k > -1$, allora T ha i due autovalori reali distinti $\sqrt{1+k}$ e $-\sqrt{1+k}$, dunque T è diagonalizzabile e una matrice diagonale che rasppresenta T è

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1+k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1+k} \end{pmatrix}.$$

(2) se $k = -1$, allora T è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

e T ha il solo autovalore reale 0 di molteplicità algebrica 2. L'autospazio V_0 è costituito dai vettori $\underline{v}$ tali che $T(\underline{v}) = \underline{0}$ cioè dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0};$$

... l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica 1. Dunque T non è diagonalizzabile.

(3) se $k < -1$, allora T non ha autovalori reali e nemmeno autovettori reali, dunque T non è diagonalizzabile.

Esercizio. È data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

con k parametro in $\mathbb{R}$. Si chiede di dire per quali valori di k l'applicazione lineare T è diagonalizzabile, e per tali valori scrivere una matrice diagonale che rappresenta T.

La matrice caratteristica e il polinomio caratteristico di T sono

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 5 & -2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (k-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (k-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3).$$

Il polinomio caratteristico di T si fattorizza completamente ed ha radici $-1, 3, k$.

(1) se $k \neq -1$ e $k \neq 3$ allora T ha tre autovalori reali distinti $-1, 3, k$ e dunque T è diagonalizzabile e una matrice diagonale che rasppresenta T è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

(2) se $k = -1$, allora T ha autovalori -1 e 3 con molteplicità algebriche rispettive 2 ed 1 ed è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio V_{-1} è costituito dai vettori $\underline{v}$ tali che $T(\underline{v}) = -\underline{v}$, cioè dalle soluzioni del sistema

$$(A + I_3)\underline{v} = \underline{0}$$

dove

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha

$$\dim(V_{-1}) = 3 - rg(A + I_3) = 3 - 2 = 1.$$

L'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 2 e geometrica 1. Dunque per il Teorema 2 T non è diagonalizzabile.

(3) se $k = 3$, allora T ha autovalori -1 e 3 con molteplicità algebriche rispettive 1 ed 2 ed è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'autovalore -1 ha molteplicità geometrica maggiore o uguale a 1 che è la sua molteplicità algebrica.

Consideriamo l'autovalore 3. L'autospazio V_3 è costituito dai vettori $\underline{v}$ tali che $T(\underline{v}) = 3\underline{v}$, cioè dalle soluzioni del sistema

$$(A - 3I_3)\underline{v} = \underline{0}$$

dove

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha

$$\dim(V_3) = 3 - rg(A - 3I_3) = 3 - 1 = 2.$$

L'autovalore 3 ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Dunque per le osservazioni al Teorema 1 T è diagonalizzabile. Una matrice diagonale che rappresenta T è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sono stati inoltre svolti i due seguenti esercizi dal testo:

Es.9.4.8, punti a) e b);

Es. 9.4.10, punti a) e c) (nella forma " ... si determinino, se possibile, due matrici diagonali distinte D_1 e D_2 che rappresentano T")

Applicazione.

Esempio. Consideriamo il seguente problema:

> Determinare se possibile un polinomio di secondo grado il cui grafico passa per i punti $(1,5)$, $(2,3)$, $(4,8)$.

Di seguito mostriamo due soluzioni: una che usa solo la teoria elementare dei sistemi lineari ed una che usa la struttura vettoriale dell'insieme dei polinomi.

Prima soluzione. Indichiamo con il polinomio cercato con

$$p(x) = a + bx + cx^2,$$

dove a, b, c sono incognite in $\mathbb{R}$. Le tre condizioni sul polinomio si scrivono $p(1) = 5$, $p(2) = 3$, $p(4) = 8$, e si traducono nel seguente sistema di tre equazioni in a, b, c

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a + 2b + 4c = 3 \\ a + 4b + 16c = 8 \end{cases}$$

Questo sistema si può risolvere come abbiamo visto con un procedimento di Gauss ...

Seconda soluzione. Indichiamo il polinomio cercato con $p(x)$, che vediamo come elemento dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al più due a coefficienti in $\mathbb{R}$. La scrittura $p(x) = a + bx + cx^2$ è la scrittura di $p(x)$ come combinazione lineare dei polinomi della base canonica 1, x, x^2 di $\mathbb{R}_2[x]$ ed a, b, c sono le coordinate di $p(x)$ rispetto a questa base.

Esistono basi più adatte al problema in esame, ad esempio quella costituita dai polinomi

$$(x-1)(x-2), \ (x-1)(x-4), \ (x-2)(x-4).$$

Questi 3 polinomi formano effettivamente una base di $\mathbb{R}_2[x]$ perchè sono linearmente indipendenti ed $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3; sono linearmente indipendenti perchè l'uguaglianza

$$\alpha(x-1)(x-2) + \beta(x-1)(x-4) + \gamma(x-2)(x-4) = 0$$

(uguaglianza fra polinomi, dunque valida per ogni valore della x) per $x = 1$ porge $3\gamma = 0$, per $x = 2$ porge $-2\beta = 0$, e per $x = 4$ porge $6\alpha = 0$, e dunque è soddisfatta solo per $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Consideriamo la scrittura

$$p(x) = a(x-1)(x-2) + b(x-1)(x-4) + c(x-2)(x-4)$$

di $p(x)$ come combinazione lineare dei vettori di questa base.

Le tre condizioni sul polinomio si scrivono $p(1) = 5$, $p(2) = 3$, $p(4) = 8$, e si traducono nelle seguenti condizioni su a, b, c :

$$3c = 5, \ -2b = 3, \ 6a = 8.$$

Dunque il problema posto ha una ed una sola soluzione, data da

$$p(x) = \frac{4}{3}(x-1)(x-2) - \frac{3}{2}(x-1)(x-4) + \frac{5}{3}(x-2)(x-4).$$

Facendo i conti si ottiene la scrittura di $p(x)$ nella forma più usuale

$$p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 10.$$

Caso Generale. Consideriamo il seguente problema:

> Determinare se possibile un polinomio di grado minore di n il cui grafico passi per n dati punti (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) del piano; per evitare ridondanze o inconsistenze, si assume che gli n punti $x_1, \dots, x_n$ sull'asse x siano a due a due distinti.

Soluzione. Indichiamo il polinomio cercato con $p(x)$, che vediamo come elemento dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dei polinomi di grado al più $n-1$ a coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo i binomi

$$x - x_1, \ x - x_2, \ \dots, \ x - x_n,$$

e i polinomi ottenuti nel modo seguente: il prodotto di tutti i binomi tranne $x - x_1$, il prodotto di tutti i binomi tranne $x - x_2$, ..., il prodotto di tutti i binomi tranne $x - x_n$, in simboli:

$$\prod_{j \neq 1}(x - x_j), \ \prod_{j \neq 2}(x - x_j), \ \dots, \ \prod_{j \neq n}(x - x_j).$$

Questi n polinomi formano una base di $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ perchè sono linearmente indipendenti ed $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ ha dimensione n; sono linearmente indipendenti perchè l'uguaglianza

$$\alpha_1 \prod_{j \neq 1}(x - x_j) + \alpha_2 \prod_{j \neq 2}(x - x_j) + \cdots + \alpha_n \prod_{j \neq n}(x - x_j) = 0$$

(uguaglianza fra polinomi, dunque valida per ogni valore della x) valutata in $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$ porge rispettivamente le uguaglianze

$$\alpha_1 \prod_{j \neq 1}(x_1 - x_j) = 0, \quad \alpha_2 \prod_{j \neq 2}(x_2 - x_j) = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n \prod_{j \neq n}(x_n - x_j) = 0$$

che per l'ipotesi $x_1, x_2, \dots, x_n$ a due a due distinti implicano $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ... $\alpha_n = 0$. Scriviamo il polinomio cercato $p(x)$ come combinazione lineare dei vettori di questa base

$$p(x) = a_1 \prod_{j \neq 1}(x - x_j) + a_2 \prod_{j \neq 2}(x - x_j) + \cdots + a_n \prod_{j \neq n}(x - x_j),$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono scalari incogniti. Per ciascun $i = 1, 2, \dots, n$ la $i-ma$ condizione sul polinomio si scrive $p(x_i) = y_i$, e si traduce nella condizione

$$a_i \prod_{j \neq i}(x_i - x_j) = y_i$$

che per l'ipotesi $x_1, x_2, \dots, x_n$ a due a due distinti equivale a

$$a_i = y_i / \prod_{j \neq i}(x_i - x_j).$$

Dunque esiste uno ed un solo polinomio soddisfacente le condizioni date, ed è

$$p(x) = y_1 \prod_{j \neq 1}(x - x_j)/(x_1 - x_j) + y_2 \prod_{j \neq 2}(x - x_j)/(x_2 - x_j) + \cdots + y_n \prod_{j \neq n}(x - x_j)/(x_n - x_j).$$

Applicazione 2.

Siano C_1 e C_2 due città e siano $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots$ e $x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots$ le rispettive sequenze dei numeri di residenti negli anni $0, 1, 2, \ldots$ Supponiamo che per un certo periodo, nel passaggio da ciascun anno al'anno successivo i numeri dei residenti in C_1 e C_2 varino secondo la seguente legge:

- l' 80% dei residenti in C_1 mantinene la residenza in C_1, e il restante 20% dei residenti in C_1 prende residenza in C_2;

- il 30% dei residenti in C_2 prende residenza in C_1, e il restante 70% dei residenti in C_2 mantiene la residenza in C_2;

Siamo interessati a descrivere le successioni $x_1^(0), x_1^(1), x_1^(2), \ldots$ e $x_2^(0), x_2^(1), x_2^(2), \ldots$ in funzione delle condizioni iniziali $x_1^{(0)}$ e $x_2^{(0)}$. Sinteticamente, siamo interessati a descrivere la successione di vettori

$$\underline{x}^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}) \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

in funzione del vettore iniziale $\underline{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

La legge di variazione si può scrivere

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1^{(p+1)} & = & 0,8x_1^{(p)} + 0,3x_1^{(p)} \\ x_2^{(p+1)} & = & 0,2x_1^{(p)} + 0,7x_1^{(p)} \end{array} \right. \qquad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

sinteticamente

$$\underline{x}^{(p+1)} = T(\underline{x}^{(p)}), \qquad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

dove $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione lineare T ha polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,5\lambda + 0,5 = (\lambda - 1)(\lambda - 0,5),$$

dunque T ha i due autovalori distinti 1 e $0,5$ ed è diagonalizzabile.

L'autospazio V_1 è costituito dai vettori $\underline{v}$ tali che $T(\underline{v}) = \underline{v}$, cioè $(A - I_2)\underline{v} = \underline{0}$, esplicitamente

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0},$$

un sistema lineare omogeneo di due equazioni lineari in due incognite x e y che è equivalente all'unica equazione $2x - 3y = 0$. ... si ha che V_1 è il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $(3, 2)$.

L'autospazio $V_{0,5}$ è costituito dai vettori $\underline{v}$ tali che $T(\underline{v}) = 0,5\ \underline{v}$, cioè $(A - 0,5I_2)\underline{v} = \underline{0}$, esplicitamente

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0},$$

un sistema lineare omogeneo di due equazioni lineari in due incognite x e y che è equivalente all'unica equazione $x + y = 0$. ... si ha che $V_{(0,5}$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $(1, -1)$.

Abbiamo dunque trovato due autovettori $(3,2)$ e $(1,-1)$ di T con autovalori associati 1 e $0,5$ che formano una base di $\mathbb{R}^2$.

Scritto il vettore iniziale come combinazione lineare dei vettori di questa base,

$$\underline{x}^{(0)} = \alpha(3,2) + \beta(1,-1)$$

si ha

$$\begin{aligned}
\underline{x}^{(1)} &= T(\underline{x}^{(0)}) = T(\alpha(3,2) + \beta(1,-1)) = \alpha(3,2) + \frac{\beta}{2}\ (1,-1)\\
\underline{x}^{(2)} &= T(\underline{x}^{(1)}) = T(\alpha(3,2) + \frac{\beta}{2}\ (1,-1)) = \alpha(3,2) + \frac{\beta}{4}\ (1,-1)\\
&\vdots\\
\underline{x}^{(p)} &= T(\underline{x}^{(p-1)}) = \ldots = \alpha(3,2) + \frac{\beta}{2^p}\ (1,-1)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Osserviamo infine che per ogni vettore iniziale esiste il limite per p che tende a $+\infty$ ed è

$$\lim_{p\to+\infty} \underline{x}^{(p)} = \lim_{p\to+\infty} (\alpha(3,2) + \frac{\beta}{2^p}\ (1,-1)) = \alpha(3,2).$$