**Algebra Lineare - Informatica per il Management 2017-18. Argomenti svolti**

Premessa. Si elencano gli argomenti svolti nel corso. L'elenco è dettagliato e i singoli punti sono descritti in modo sintetico; si rimanda ai resoconti delle lezioni e, quando in tali resoconti esplicitamente detto, al testo. In vista della preparazine dell'orale, è da considerarsi primaria la comprensione delle definizioni e degli enunciati delle proposizioni e teoremi. Molte dimostrazioni sono solo verifiche basate sulle definizioni, e quasi sempre sono state svolte; per quanto riguarda le dimostrazioni più complesse, alcune sono state sostituite da verifiche in casi di significativa generalità, di altre si è data solo l'idea, ed infine alcune non sono state date. Le dimostrazioni più complesse e che sono da ritenersi opzionali, e le dimostrazioni non date e quindi non richieste sono esplicitamente segnalate nell'elenco.

## Sistemi lineari. Matrici, prodotto di matrici.

Equazione lineare in $n$ incognite su $\mathbb{R}$; coefficienti, termine noto; soluzione. Sistema di $m$ equazioni lineari in $n$ incognite. Esempi di sistemi di due equazioni lineari in due incognite che ammettono una sola soluzione, nessuna, o infinite soluzioni.

Insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali; righe e colonne di numeri reali; identificazione di $n-$ple con colonne. Prodotto di una riga per una colonna. Rappresentazione sintetica di una equazione lineare. Insieme $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici di tipo $m \times n$ ad elementi reali. Per un sistema lineare, matrice dei coefficienti, colonna dei termini noti, matrice completa. Operazione parziale di prodotto di matrici. Rappresentazione sintetica di un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite nella forma $A\underline{x} = \underline{b}$ ($A$ di tipo $m \times n$). Proprietà ssociativa del prodotto di matrici.

Pivot di una riga non nulla. Matrice a scala. Rango per righe di una matrice a scala. Sistema lineare a scala. Risoluzione di un sistema lineare a scala. Variabili libere. Proposizione: per un sistema lineare a scala $A\underline{x} = \underline{b}$, condizione per l'esistenza di soluzioni e relazione fra i ranghi per righe di $A$ e $(A|\underline{b})$, unicità della soluzione o numero di variabili libere. Operazioni elementari sulle righe di una matrice e corrispondenti operazioni sulle equazioni di un sistema lineare. Sistemi lineari equivalenti. Proposizione: le operazioni elementari sulle equazioni di un sistema lasciano invariato l'insieme delle soluzioni. Procedimento di Gauss per la trasformazione, mediante operazioni elementari per righe, di una matrice in una matrice a scala. Procedimento di Gauss per la risoluzione di un sistema lineare.

## Spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali.

Numeri reali. Struttura algebrica di campo. Identificazione di $\mathbb{R}$ con l'insieme dei punti di una retta. Insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali. Operazioni di somma e prodotto per scalari. Identificazione di $\mathbb{R}^2$ con l'insieme dei vettori del piano applicati in un punto fissato, significato geometrico delle operazioni. Analogamente per l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali e vettori dello spazio applicati in un punto fissato. Insieme $\mathbb{R}^n$ delle ennuple ordinate di numeri reali. Operazioni di somma e prodotto per scalari; proprietà. Insieme $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici di tipo $m \times n$ di numeri reali. Operazioni di somma e prodotto per scalari.

Definizione: spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Proposizione: prime proprietà delle operazioni in uno spazio vettoriale. Spazio vettoriale nullo. Cosa deve contenere uno spazio vettoriale non nullo. Spazi vettoriali di funzioni. Definizione: sottospazio di uno spazio vettoriale. Sottospazi di $\mathbb{R}^2$; interpretazione geometrica. Proposizione: l'intersezione di due sottospazi è un sottospazio. Definizione: equazione lineare omogenea; sistema lineare omogeneo. Proposizione: l'insime delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea in $n$ incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Polinomi formali in una indeterminata a coefficienti reali; operazioni di somma e prodotto per scalari. Spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$. Funzione polinomiale associata ad un polinomio formale. Principio di identità dei polinomi. Grado di un polinomio non nullo; proprietà. Spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$.

## Insiemi generatori, insiemi linearmente indipendenti

Definizione: combinazioni lineari di una sequenza vettori; insieme di generatori di uno spazio vettoriale. Insiemi di generatori di $\mathbb{R}^2$; interpretazione geometrica. Insiemi di generatori ovvi di $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato. Definizione: sottospazio generato da un insieme di vettori. Proposizione: il sottospazio generato da un insieme di vettori di uno spazio $V$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $V$ che contiene l'insieme. Proposizione: il sottospazio generato da un insieme di vettori $A$ ed un vettore $\underline{v}$ è uguale al sottospazio generato da $A$ se e solo se $\underline{v}$ appartiene al sottospazio generato da $A$. Il problema di determinare le combinazini lineari di dati $m$ vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano uguali a un dato vettore di $\mathbb{R}^n$ equivale al problema di risolvere un sistema lineare di $n$ equazioni in $m$ incognite; relazione fra i vettori dati e la matrice del sistema.

Definizione: sequenza di vettori linearmente indipendente (prima definzione). Vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$; significato geometrico. Proposizione: ogni sottosequenza di una sequenza linearmente indipendente è linearmente indipendente (non dimostrata). Esempi ovvi di sequenze linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$. Definizione: sequenza di vettori linearmente indipendente (seconda definzione). Vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$; significato geometrico. Esempi ovvi di sequenze linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$. Proposizione: in $\mathbb{R}^n$ ciascuna sequenza di $m > n$ vettori è linearmente dipendente. Proposizione: le due definizioni di indipendza lineare sono equivalenti. Insiemi linearmente indipendenti.

## Basi e dimensione

Definizione: base di uno spazio vettoriale. Basi di $\mathbb{R}^2$; interpretazione geometrica. Proposizione: ogni vettore si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori di una base. Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Base canonica di $\mathbb{R}^n$ e relative coordinate. Basi ovvie di $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e relative coordinate. Problemi: determinazine di una base dello spazio generato da un insieme finito di vettori; determinazione di una base dello spazio delle soluzioni di un'equazione lneare omogenea. Base dello spazio nullo. Teorema: ogni spazio vettoriale finitamente generato possiede una base; ogni insieme finito di generatori contiene una base. Proposizione: aggiungendo un vettore ad un insieme linearmente indipendente si ottiene un insieme ancora linearmente indipendente se e solo se il vettore non è combinazione lineare dei vettori dell'insieme. Proposizione: in uno spazio vettoriale finitamente generato, ogni insieme linearmente indipendente è contenuto in una base.

Teorema: in uno spazio vettoriale finitamente generato, il numero dei vettori in un qualsiasi insieme linearmente indipendente è minore o uguale al nemero dei vettori in una qualsiasi base (senza dimostrazione). Definzione: dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato. Dimensione di $\mathbb{R}^n$ e di $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Proposizione: per un insieme di $n$ vettori in uno spazio vettoriale di dimensione $n$, equivalenza fra l'essere generatore, base, linearmente indipendente. Riconoscimento di basi di $\mathbb{R}^n$. Costruzione di una base contenuta in un insieme (generatore). Costruzione di una base contenete un insieme (linearmente indipendente). Proposizione: per un sottospazio $W$ di uno spazio vettoriale $V$, relazione fra le dimensioni di $W$ e $V$.

In uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, problema della determinazione efficiente di una base del sottospazio generato da un insieme finito di vettori. Proposizione: le operazioni elementari sulle righe lasciano invariato il sottospazio generato dalle righe di una matrice. Proposizione: indipendenza lineare delle righe non nulle in una matrice a scala. Metodo generale per determinare una base dello spazio generato da un insieme finito di vettori. In uno spazio $\mathbb{R}^n$, problema della costruzione efficiente di una base che contiene un dato insieme linearmente indipendente. Caso particolare di una sequenza di vettori con sequenza degli indici dei pivot strettamente crescente. Proposizione: le operazioni elementari sulle righe lasciano invariata la proprietà di indipendenza lineare delle righe di una matrfice. Metodo generale per determinare una base che contiene un dato insieme linearmente indipendente.

Definizione: rango per righe di una matrice. Proposizione: per lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo a scala di $m$ equazioni in $n$ incognite $A\underline{x} = \underline{0}$, dimensione in relazione ad $n$ ed al rango per righe di $A$ (motivazione in un caso significativo). Proposizione: per lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di $m$ equazioni in $n$ incognite $A\underline{x} = \underline{0}$, dimensione in relazione ad $n$ ed al rango per righe di $A$.

## Applicazioni lineari

Funzioni plinomiali omogeneee di primo grado (eventualmente nulle) in $n$ variabili su $\mathbb{R}$, proprietà rispetto alle operazioni vettoriali su $\mathbb{R}^n$. Definizione: applicazione lineare fra due spazi vettoriali. Applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(\underline{x}) = A\underline{x}$ associata ad una matrice $A$ di tipo $m \times n$. Teorema: rappresentazione di ogni applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mediante una matrice matrice di tipo $m \times n$. Applicazione lineare identità su $\mathbb{R}^n$ e matrice unità $I_n$. Composizione di funzioni fra insiemi. Proposizione: la composizione di due applicazioni lineari è un'applicazine lineare. Proposizione: corrispondenza fra composizione di applicazioni lineari fra spazi $\mathbb{R}^n$ e prodotto di matrici. Teorema: esistenza ed unicità di un'applicazione lineare che su una base del dominio assume valori comunque assegnati (dimostrazione in un caso significativo). Definizione: immagine $\mathrm{Im}(L)$ e nucleo $\mathrm{Ker}(L)$ di un'applicazione lineare $L$. Proposizione: $\mathrm{Im}(L)$ e $\mathrm{Ker}(L)$ sono sottospazi rispettivamente del codominio e del dominio di $L$. Per funzioni fra insiemi, suriettività, iniettività, biiettività. Proposizione: caratterizzazione dell'iniettività di un'applicazione lineare nei termini del suo nucleo.

Teorema: relazione fra le dimensioni del dominio, del nucleo e dell'immagine di una applicazione lineare (dimostrazione in un caso significativo). Proposizione: per due spazi vettoriali di dimensione finita $V$ e $W$, relazione fra le dimensioni di $V$ e $W$ ed esistenza di applicazioni lineari suriettive e/o iniettive $V \to W$. Proposizione: applicazioni lineari biiettive, combinazioni lineari nel dominio e combinazioni lineari nel codominio. (dimostrazione opzionale) Definizione: Isomorfismo fra spazi vettoriali. Teorema: per uno spazio vettoriale $V$ con una base ordinata fissata di $n$ vettori, isomrfismo canonico $V \to \mathbb{R}^n$. Isomorfismi canonici $\mathbb{R}_n[x] \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$.

**Applicazioni lineari e sistemi lineari**

Definizione: rango per colonne di una matrice. Teorema: per ogni matrice, rango per righe e rango per colonne coincidono. Definizione: rango di una matrice. Definizione di matrice trasposta. Riformulazione del teorema.

Definizione: per una funzione fra insiemi, insieme preimmagine di un elemento del codominio. Proposizione: per un'applicazione lineare, descrizione di ciascun insieme preimmagine in relazione al nucleo. Teorema di Rouchè-Capelli: condizioni per l'esistenza di soluzioni di un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$; descrizione dell'insieme delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$ in relazione allo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$.

**Applicazione lineare inversa.**

Definizione: per funzioni fra spazi insiemi, invertibilità e inversa. Proposizione: per funzioni fra insiemi, equivalenza fra biiettività e invertibilità, unicità dell'inversa (non dimostrata). Definizione: per applicazioni lineari fra spazi vettoriali, invertibilità e inversa. Proposizione: per applicazioni lineari fra spazi vettoriali, equivalenza fra biiettività e invertibilità, unicità dell'inversa (non dimostrata). Proposizione. Per un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associata ad una matrice $A$, equivalenza fra l'essere $L$ invertibile e l'avere $A$ rango $n$; procedimento di Gauss per il calcolo di $L^{-1}$ (non dimostrata).

Definizione: per matrici quadrate, invertibilità e inversa. Proposizione: per una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associata ad una matrice $A$, equivalenza invertibilità di $L$ e invertibilità di $A$; relazione fra $L^{-1}$ ed $A^{-1}$. Proposizione: per una matrice quadrata $A$, equivalenza fra l'essere $A$ invertibile e l'avere $A$ rango $n$; procedimento di Gauss per il calcolo di $A^{-1}$.

**Determinante**

Definizione: per ciascun intero positivo $n$, determinante di ordine $n$ come una funzione $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che soddisfa certe proprietà. Teorema: esistenza e unicità della funzione determinante di ordine $n$ (non dimostrato). Valore del determinante di una matrice diagonale. Proposizione: comportamento del determinante rispetto alle operazioni elementari sulle righe. Proposizione: valore del determinante di una matrice triangolare. Uso del procedimento di Gauss per il calcolo dei determinanti. Formula esplicita per il determnante di una matrice di ordine 2 e di ordine 3, regola di Sarrus; cenni al caso generale (opzionale). Proposizione: una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante (non dimostrato). Teorema: per una matrice quadrata, equivalenza fra indipendenza lineare delle righe, non annullamente del determinante, e indipendeza lineare delle colonne (idea della dimostrazione, opzionale). Teorema di Binet: comportamento del determinante rispetto al prodotto (non dimostrato).

Complemento algebrico di un elemento di una matrice quadrata. Teorema: sviluppi di Laplace del determinante (non dimostrato). Teorema: per matrici quadrate, equivalenza fra invertibilità e non annullamento del determinante; formula esplicita per la matrice inversa (dimostrato solo invertibilità implica non annullamento del determinante).

## Cambio di base

Definizione: $n-$pla delle coordinate $(\underline{v})_{\mathcal{B}}$ di un vettore $\underline{v}$ rispetto ad una base ordinata $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale $n-$dimensionale. Nello spazio $\mathbb{R}^n$, calcolo delle coordinate di un vettore rispetto ad una base ordinata; caso particolare della base canonica $\mathcal{C}$. Definizione: matrice $L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ di un'applicazione lineare $L$ rispetto a basi ordinate $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$ di codominio e dominio. Teorema: nello stesso contesto della definizione, per ogni $\underline{v}$ nel dominio di $L$ si ha $(L(\underline{v}))_{\mathcal{B}'} = L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\ (\underline{v})_{\mathcal{B}}$ (verifica su un esempio significativo). Calcolo della matrice di un'applicazioni lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a basi ordinate di codominio e dominio; caso particolare della base canonica del codominio. Definizione: per $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$ basi ordinate di uno spazio vettoriale $V$, matrice di cambio di base $\mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Proposizione: nello stesso contesto della definizione, per ogni $\underline{v}$ in $V$ si ha $(\underline{v})_{\mathcal{B}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\underline{v})_{\mathcal{B}}$. Per lo spazio $\mathbb{R}^n$, caso particolare delle matrici $\mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Teorema: per due applicazioni lineari $F : V \to W$ e $G : W \to Z$ fra spazi vettoriali $V, W, Z$ con basi ordinate $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$, si ha $(G \circ F)_{\mathcal{B}''\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Proposizione: per un'isomorfismo $F : V \to W$ fra due spazi vettoriali $V, W$ con basi ordinate $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, si ha $(F^{-1})_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1}$. Caso particolare: $\mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1}$.

Teorema: per un'applicazione lineare $L : V \to V$ e due basi ordinate $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di $V$, si ha $F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\ F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\ \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Caso particolare: per un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ed una basi ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, si ha $F_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\ F_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1} F_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Estensione del teorema precedente: relazione fra le matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare.

## Autovalori ed autovettori

Definizione: applicazione lineare diagonalizzabile di uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè. Definizione: autovettori ed autovalori di un'applicazione lineare di uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè. Proposizione: per un'applicazione lineare di uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè, diagonalizzabilità equivale ad esistenza di una sequenza di autovettori che forma una base di $\mathbb{R}^n$; autovalori associati agli autovettori ed elementi delle matrici diagonali.

Definizione: per una matrice quadrata, matrice caratteristica e polinomio caratteristico. Teorema: per un'applicazione lineare di uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè, caratterizzazione degli autovalori come radici del polinomio caratteristico. Proposizione: tutte le matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare da uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè hanno lo stesso polinomio caratteristico. Definizione: autospazio associato ad un autovalore.

Teorema: indipendenza lineare di una sequenza di autovettori associati ad autovalori distinti (idea della dimostrazione, opzionale). Corollario: diagonalizzabilità di applicazioni lineari da una spazio $\mathbb{R}^n$ in sè aventi $n$ autovalori distinti. Definizione: molteplicità di una radice di un polinomio in una indeterminata. Definizione: molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Teorema: per un'applicazione lineare di uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè, completa fattorizzabilità del polinomio caratteristico e uguaglianza fra molteplicità geometriche e algebriche implicano diagonalizzabilità. (idea della dimostrazione, opzionale) Osservazione: per un'applicazione lineare di uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè, completa fattorizzabilità del polinomio caratteristico e debole superiorità delle molteplicità geometriche sulle algebriche implicano diagonalizzabilità (motivazione, opzionale). Osservazione: la condizione di debole superiorità della molteplicità geometrica sulla algebrica è soddisfatta se la molteplicità algebrica vale 1. Teorema: per un'applicazione lineare di uno spazio $\mathbb{R}^n$ in sè, diagonalizzabilità implica completa fattorizzabilità del polinomio caratteristico e uguaglianza fra molteplicità geometriche e algebriche.

Applicazione dell'idea di cambiamento di base alla ricerca di un polinomio con grafico passante per dati punti. Applicazione della teoria di autovettori ed autovalori allo studio dell'evoluzione di un complesso di dati che variano nel tempo secondo una legge lineare fissata.