Esercizi

(1) In $\mathbb{R}[x]$ sono dati i polinomi

$$p(x) = x + 2,\ q(x) = x^2 - 6,\ r(x) = x^2 + 3x,\ s(x) = x^2 + x + k$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determini una base per il sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ generato da $p(x), q(x), r(x)$ e si determinino i valori di k per i quali $s(x)$ appartiene a questo sottospazio.

(2) In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori

$$(1, 2, -3, 1),\ (2, -3, 1, 1),\ (-3, 1, 2, k)$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali questi tre vettori sono linearmente indipendenti e per tali valori di k si determini una base di $\mathbb{R}^4$ che li contiene.

(3) È dato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ ky + ku = 0 \\ ky + (k^2 - k)z + ku = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z, u, dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determini, al variare del parametro k, la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni del sistema.

(4) Sono date le applicazioni lineari

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ F(x, y, z) = (x - 2z, y + 3z),$$
$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ G(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 + \underline{e}_3,\ G(\underline{e}_2) = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 3\underline{e}_1 + \underline{e}_4.$$

Si scrivano le matrici associate ad F e G (rispetto alle basi canoniche), si determini l'applicazione lineare $G \circ F$ e si stabilisca se è iniettiva.

(5) È data l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ L(x, y) = \begin{pmatrix} x + ky & x + y \\ 0 & kx + y \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determini, al variare di k, la dimensione e una base per $\mathrm{Ker}(L)$ ed $\mathrm{Im}(L)$.

(6) È data l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ L(x, y, z) = (x + 3z, y, 2x + kz)$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali L è invertibile e per tali valori si calcoli l'applicazione inversa L^{-1}.

(7) È data l'applicazione lineare

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (z, x - y + z, x).$$

Si determini se possibile una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T, si controlli la correttezza del risultato e si scriva la matrice di T rispetto a $\mathcal{B}$.

(8) È data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali T è diagonalizzabile e per tali valori si scrivano tutte le matrici diagonali che rappresentano T.

(9) Si determini un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia autovettori $(1, 0, 0)$ e $(2, 1, 0)$ con autovalori associati -1 e -2.