Lezione del 27.02.

Questa lezione si riferisce al Cap.1 "Introduzione ai sistemi lineari" Par. 1.1 "Sistemi lineari: primi esempi" e Par.1.2 "Matrici". Di seguito si riportano gli orgomenti svolti a lezione, di regola sinteticamente ma dettagliatamente per le parti non presenti nel testo.

Sistemi lineari a coefficienti e incognite reali.

Esempi di una equazione lineare in una incognita x con una soluzione, con nessuna soluzione, con soluzione ogni numero reale. Insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali. Esempi di una equazione lineare in due incognite x, y : equazione $2x + 3y = 6$, che ha infinite soluzioni, date da $y = -(2/3)x + 2$ e x qualsiasi, cioè le coppie ordinate $(x, -(2/3)x + 2)$ con x libera; equazione $y = 1$, che ha infinite soluzioni, le coppie ordinate $(x, 1)$ con x libera; equazione $0x + 0y = 1$, che ha nessuna soluzione; $0x + 0y = 0$, che ha soluzione ogni coppia di numeri reali.

Insieme $\mathbb{R}^n$ delle ennuple ordinate di numeri reali. Definizione di equazione lineare in n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ come scrittura

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \quad \text{in breve } \sum_{i=1}^{n} a_ix_i = b,$$

dove gli a_i e b sono costanti in $\mathbb{R}$. Definizione di soluzione di una tale equazione come una ennupla ordinata $(r_1, r_2, ..., r_n)$ in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$a_1r_1 + a_2r_2 + ... + a_nr_n = b.$$

Esempi di un sistema lineare di due equazioni in due incognite x, y : sistema di $2x+3y = 1$ e $4x + 5y = 3$, che ha una e una sola soluzione, $(2, -1)$; sistema di $2x + 3y = 1$ e $4x + 6y = 3$, che ha nessuna soluzione; sistema di $2x + 3y = 1$ e $4x + 6y = 2$, che equivale all'unica equazione $2x + 3y = 1$ ed ha infinite soluzioni.

Definizione di sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, \dots, x_n$ come sequenza di m equazioni lineari in $x_1, \dots, x_n$ e di soluzione di un tale sistema come una ennupla ordinata $(r_1, \dots, r_n)$ in $\mathbb{R}^n$ che è soluzione di ciascuna delle m equazioni. Rappresentazione di un tale sistema come

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con gli a_{ij} e i b_i costanti in $\mathbb{R}$. Matrice incompleta del sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Righe, colonne, matrici; prodotto

-$n-$ple, righe, colonne. Di regola, indicheremo una $n-$pla ordinata di numeri reali con una lettera minuscola sottolineata e, una volta scelta una lettera per indicare una $n-$pla, useremo la stessa lettera con indici per indicare le sue componenti. Risulta utile potere rappresentare una $n-$pla ordinata di numeri reali come una riga di numeri reali oppure come una colonna di numeri reali. Indichiamo con $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{1\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$, gli insiemi delle sequenze ordinate, delle righe, delle colonne ad n componenti.

-Si definsce il prodotto di una riga per una colonna aventi lo stesso numero di componenti come la somma dei prodotti delle componenti della riga per le corrispondenti componenti della colonna; il prodotto di una riga per una colonna che non hanno lo stesso numero di componenti non è definito. Così ad esempio

$$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32.$$

In generale,

$$(a_1\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Questo prodotto può essere usato per rappresentare sinteticamente le equazioni lineari. Ciascuna equazione lineare $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ su $\mathbb{R}$ si può rappresentare come un'equazione in una sola incognita $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^{n\times 1}$ con un coefficente $\underline{a} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e un termine noto $b \in \mathbb{R}$

$$(a_1\ \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b, \quad \text{sinteticamente} \quad \underline{a}\ \underline{x} = b$$

-Matrici. Siano m ed n due interi positivi fissati. Una matrice di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ è una tabella di $m \cdot n$ numeri reali disposti su m righe ed n colonne; l'elemento della $i-$ma riga e $j-$ma colonna di una matrice si dice in breve "elemento di posto (i,j)" della matrice. Le matrici di solito vengono indicate con lettere maiuscole; per indicare che una matrice A ha tipo $m \times n$ si usa scrivere $\underset{m\times n}{A}$. Indichiamo l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}^{m\times n}$. La generica matrice A di tipo $m \times n$ viene solitamente rappresentata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

oppure, più brevemente,

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}},$$

o $A = (a_{ij})$ quando il tipo è chiaro dal contesto.

- Noi useremo talvolta una notazione un po' diversa, suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo come Matlab e Octave. Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A, per indicare una matrice, useremo: il simbolo A_{ij} per indicare l'elemento di posto (i, j) in A, il simbolo $A_{i:}$ per indicare la $i-$ma riga di A, il simbolo $A_{:j}$ per indicare la $j-$ma colonna di A.

-Prodotto di matrici. Se il numero delle colonne di una matrice A è uguale al numero delle righe di una matrice B, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo così una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB. Ad esempio, si ha

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 6 \\ 3\cdot 1+4\cdot 4 & 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot 6 \\ 5\cdot 1+6\cdot 4 & 5\cdot 2+6\cdot 5 & 5\cdot 3+6\cdot 6 \\ 7\cdot 1+8\cdot 4 & 7\cdot 2+8\cdot 5 & 7\cdot 3+8\cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{pmatrix}$$

In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ è la matrice AB di tipo $m \times p$

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{AB}$$

data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i, j) in AB e' dato dal prodotto della riga $i-$ma di A per la colonna $j-$ma di B :

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= A_{i:}B_{:j} \\ &= (A_{i1}\ A_{i2}\ \dots\ A_{in}) \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix} \\ &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} \\ &= \sum_{h=1}^{n} A_{ih}B_{hj}. \end{aligned}$$

Nella notazione usuale, la definizione di prodotto è la seguente: per $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$ si pone $AB = C$, dove $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$ e' data da

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}b_{h,j}.$$

La moltiplicazione di matrici estende la moltiplicazione dei numeri reali, nel senso che le matrici di tipo $1 \cdot 1$ sono numeri reali e la moltiplicazione di matrici di tipo $1 \cdot 1$ è la moltiplicazione di numeri reali.

-Sistemi lineari. Questo prodotto può essere usato per rappresentare sinteticamente i sistemi lineari. Ad esempio, ciascun sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

in due incognite x_1, x_2 si può rappresentare come un'equazione in una colonna incognita 2×1 con coefficiente una matrice 3×2 e con termine noto una colonna 3×1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \text{sinteticamente} \quad A\, \underline{x} = \underline{b}.$$

Il generale, ciascun sistema lineare di m equazioni in in n incognite su $\mathbb{R}$ si può rappresentare come un'equazione in una colonna incognita $\underline{x}$ $n \times 1$ con coefficiente una matrice A $m \times n$ e con termine noto una colonna $\underline{b}$ $m \times 1$:

$$A\underline{x} = \underline{b}.$$

- Matrici unità. Le matrici quadrate che hanno 1 sulla diagonale discendente e 0 altrove svolgono il ruolo del numero 1, e per questa ragione vengono dette "matrici unità". Esplicitamente, queste matrici sono

$$I_1 = (1), \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \dots;$$

la matrice I_n unità di ordine n è la matrice quadrata di ordine n data da

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

La proprietà di queste matrici è che

$$I_m A = A = A I_n,$$

per ogni m, n e per ogni matrice A di tipo $m \times n$.

Verifichiamo la prima parte di questa proprieta' per $m = 2$ e $n = 3$. Per ogni matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

di tipo 2×3 si ha

$$\begin{aligned} I_2 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1a + 0d & 1b + 0e & 1c + 0f \\ 0a + 1d & 0b + 1e & 0c + 1f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

- Associatività. Date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sarà di tipo $m \times q$:

$$(AB)C, \qquad A(BC).$$

Ad esempio, per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \\ A(BC) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprietà associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Potremo così scrivere un prodotto di più matrici senza usare parentesi.

- Noncommutatività. Date due matrici A e B può succedere che il prodotto AB sia defînto ed il prodotto BA non sia definito, come nel caso di

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix};$$

anche quando AB e BA sono definiti in generale ci si aspetta che $AB \neq BA$.